

I. 서 론

JLT 리스크 프리미엄을 이용한 부도확률 결정

김 계 흥*, 김 성 태**

< 초 록 >

본 연구는 Jarrow외 (1997)의 전이확률 모형에 기반하여 기업의 등급별 부도확률 특히 경험 자료에서 특정 등급의 부도경험이 존재하지 않는 경우 이를 위험중립 부도확률과 비교하여 새로이 경험적 실제 부도확률 및 전이행렬을 생성하는 방법을 다루고 있다. 이러한 부도확률 및 전이행렬 결과는 신용 가치평가 및 리스크 관리 수행에 있어서 중요한 기반자료로 사용된다. 제시한 방법론은 기업의 프로파일 자료를 사용하지 않기 때문에 유지 및 사용이 간편하며 제시된 결과는 기존에 생성된 관련 연구 결과에 비하여 충분히 의미 있을 것으로 기대된다. 본 연구는 1년 단위 부도확률 생성과 관련하여 3개의 서로 다른 방법으로 부도확률을 생성하고 있으며 미래 부도확률 관련하여 5개 서로 다른 방식으로 미래 부도확률 및 전이행렬을 생성하는 방법과 결과를 제시하고 있다. 제시한 방법론은 추후에 경기 국면별 부도확률 및 전이행렬 추정 문제에서 간편하면서도 보다 효과적으로 적용 될 수 있을 것으로 기대된다.

주제어 : 신용전이행렬, 경험적 실제 부도확률, 위험중립 부도확률, 생성자 행렬

기업 신용등급은 특정기업 또는 기업이 발행한 특정채권에 대한 미래의 원리금 상환 능력 또는 가능성을 나타내며 미래 특정 고리기간까지 기업의 강건성에 근거하여 잠재적인 신용위험에 대한 관리 능력을 반영한다. 환언하면 신용등급은 기업이 조달한 채무에 대한 원리금 상환능력 즉, 미래 특정시기에 특정규모의 현금을 창출 할 수 있는 능력을 나타내기 때문에 신용등급 평가시 관련된 모든 영향 요인들을 고려하여 기업의 미래 현금흐름을 정확하게 예측하여 반영하는 것이 필수적이다. 이러한 신용등급과 관련하여 기업의 입장에서는 보다 높은 신용등급을 유지 또는 달성함으로써 자금조달 비용을 낮출 수 있고, 회사채 투자자의 입장에서는 기업이 부도나지 않고 약속된 원리금을 약속된 기일에 사고없이 회수하는 것에 관심을 갖게 된다. 따라서 기업 신용등급의 변동 및 부도 가능성은 투자자와 해당기업 모두에게 중요한 관심사일 수밖에 없다.

기업의 부도확률을 정확하게 추정하는 것은 관련학계에서도 오래된 문제이다. 기존 연구들은 이를 위하여 기업의 재무 및 비재무적 정보를 활용하여 비선형 회귀분석 모형 또는 인공지능 신경망(Artificial Neural Net) 모형 등을 이용하여 기업 부도확률을 추정하는 연구가 대부분이었다. 그러나 대부분의 이러한 연구들은 표본 집단에서 높은 설명력을 보이지만 표본의 부도사건 예측 문제에서는 다소 설명력이 저하되는 단점을 지니고 있다. 또한, 모형의 구현을 위하여 필요로 하는 자료의 수가 많고 특정 기업의 경우 내부 재무 및 비재무 자료를 구하기 어려운 것이 현실이다.

본 연구에서는 이러한 부담에 착안하여 다소 단순한 방법으로 기업의 신용등급별 부도확률을 추정하는 방법을 제시한다. 부도확률 관련 다양한 기존 연구 중 본 연구에서 제시하는 방법은 Jarrow외 (1997, 이후 JLT)의 전이확률 모형을 다소 변형한 모형이다. JLT(1997)은 개별 기업이 아닌 기업 신용등급별로 다른 등급으로의 전이확률을 새롭게 추정 및 결정하는 방법을 제시하고 있다. 이러한 전이확률 결과는 신용 가치평가 및 리스크 관리 수행에 기반자료로 사용된다. 본 연구는 기본적으로 JLT의 방법론을 적용하며 신용등급별 부도확률 결정시 경험적 실제 부도확률과 위험중립 부도확률이 비교유추를 통하여 새로이 실제 부도확률을 결정하는 방법을 다루고 있다. 제시한 방법론은 기업의 프로파일 자료를 사용하지 않기 때문에 유지 및 사용이 간편하며

* 한국주택금융공사 주택금융연구원 연구위원, E-mail : weareda@hf.go.kr

** 교신저자, 동의대학교 경영학과 교수, E-mail : stkim@deu.ac.kr.

제시된 결과는 기존에 생성된 관련 연구 결과에 비하여 모자람이 없을 것으로 판단된다. 비록 본 연구는 신용평가사에서 평가한 등급 결과 전체를 사용하였지만 이를 경기의 순환 즉, 성장기와 쇠퇴기를 구분하여 적용할 경우 보다 의미있는 결과를 도출할 수 있을 것으로 기대된다.

이후의 전개는 2장에서 분석모형을 설명하고, 3장에서 전이행렬 및 부도확률 추정의 자세한 방법과 결과를 설명한다. 그리고 4장에서 결론을 맺고 있다.

II. 부도확률과 전이행렬 모형

신용 가치평가 및 위험관리 분야에서 고려하는 부도확률은 경험적 실제 부도확률(Real Probability of Default)과 채권 수익률에서 유추되는 위험중립 부도율(Risk-Neutral Probability of Default)이 존재한다. 일반적으로 경험적 실제 부도확률은 신용평가사에서 평가하는 신용등급별 부도확률로서 과거평가 결과를 이용하여 경험적으로 발생된 부도사건의 빈도수를 추정하여 계산된다. 이러한 경험적 실제 부도확률은 자료 수 및 수집 기간 등의 경험치에 따라 편의(bias)를 나타내는 경향이 존재한다. 이와 별도로 위험중립 부도확률은 기업의 실제 부도사건 경험치가 아닌 채권시장에서 신용등급별 채권 수익률과 무위험 국채 수익률 관계에서 유추된 이론적 부도율을 의미한다. 여기서 위험중립이란 부도사건을 고려한 채권 기대수익의 무위험 금리 할인가격과 약속된 원리금을 무위험금리 및 가산금리의 합으로 할인한 가격이 일치하도록 부도율 수준을 결정하는 것을 나타낸다. 본질적으로 경험적 실제 부도확률은 과거의 경험에 기반한 정보로서 과거의 상태가 미래에 지속됨을 가정하고 있으며, 위험중립 부도확률은 채권 가격에서 유추된 미래 지향적 정보를 반영하므로 시장 참여자들이 판단한 특정 신용등급의 부도 가능성을 나타내고 있다. 이와 관련하여 경험적 실제 부도율은 주로 신용 포트폴리오의 리스크 관리 목적으로 사용되며 위험중립 부도확률은 동일등급의 비거래 회사채의 가격 평가 또는 보다 보수적 기준의 리스크 관리에서 사용된다.

두 부도확률 개념은 서로 독립적으로 개발되어 오다가 JLT(1997)에 의해서 본격적으로 관련성을 고려하게 되었다. JLT(1997)는 먼저 무위험채권과 위험채권 가격간 다음의 식(1)과 같은 관계를 가정하였다. 단, 본 연구에서는 일관성을 유지하는 한도 내에서 논의의 편의를 위해 특별한 언급이 없는 한 만기 1년을 가정한다.

$$V^i(1) = P(1) \cdot (\delta + (1 - \delta)(1 - q_{iK})) \quad (1)$$

여기서,

$V^i(1)$: 1년만기 i 신용등급 무이표 회사채 가격,

$P(1)$: 1년만기 무이표 국채 가격,

δ : 부도시 회수율, q_{iK} : i 신용등급의 1년 부도율,
 K : 부도상태

부도확률 q_{iK} 는 연초 i 등급에서 연말에 부도로 판정될 확률을 나타낸다. 식(1)의 의미는 다음과 같이 변형하면 파악이 용이하다.

$$\frac{1}{1+r_f+CS^i} = \frac{q_{iK} \cdot \delta + (1-q_{iK}) \cdot 1}{1+r_f} \quad (2)$$

여기서,

r_f : 1년만기 국채 현물수익률,

CS^i : i 신용등급 1년만기 가산금리

위 식은 확정된 1의 금액을 신용가산금리를 반영하여 할인한 현재(좌변)와 부도사건을 고려한 기댓값(우변) 즉, q_{iK} 확률로 부도시 회수율(δ) 만큼을 획득하거나 또는 $1-q_{iK}$ 확률로 생존시 원금 1을 받는 위험채권의 기댓값을 무위험금리로 할인한 금액이 같아야 한다는 조건을 나타낸다. 이 식에서 적정 회수율을 가정할 경우 신용가산금리와 위험중립 부도확률은 일대일 대응관계를 갖게 된다. 이제 식(1)을 다시 한번 살펴보면 위험채권 가격은 무위험 국채 가격에서 기본적으로 회수율 만큼을 확보하고 1년후 생존시 나머지 부분(Loss Given Default)을 획득할 기댓값을 의미하는 것이다. 이 식을 신용위험 가치평가의 기본식(Fundamental Equation of Credit Risk Pricing)이라 하는데 모든 신용가치 평가 연구의 기초에 이러한 기댓값 개념이 내재되어 있다.

한편, 신용등급 평가 결과 시계열을 이용할 경우 등급별 부도율 뿐만 아니라 특정 등급이 유지되거나 또는 다른 등급으로 전이되는 빈도수를 관찰 할 수 있다. JLT(1997)은 먼저 경험적 실제 신용등급 전이행렬과 위험중립 전이행렬을 구분하여 다음의 식(3)과 식(4)를 정의하고 식(1)을 이용하여 두 전이행렬간 관계식을 설정하였다.

실제 신용등급 전이행렬

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

위험중립 신용등급 전이행렬

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & \cdots & \tilde{q}_{1K} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} & \cdots & \tilde{q}_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{q}_{K-1,1} & \tilde{q}_{K-1,2} & \cdots & \tilde{q}_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

전이행렬에서 각 원소는 0보다 크거나 같으며 각 행의 합은 반드시 1이 된다. 즉, $q_{ij}, \tilde{q}_{ij} \geq 0$ 이고 $\sum_{j=1}^K q_{ij} = \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij} = 1, \forall i$ 이 성립한다. 위 행렬은 1년을 가정한 것으로서 실제 경험적 전이확률의 경우 마코프 가정에 따라 본 행렬을 누적 제공하여 다기간 전이행렬을 구하는 것이 가능하다. 이제 두 전이행렬간 연계를 위하여 두 전이확률간에 다음의 선형관계를 가정하였다.

$$\tilde{q}_{ij} = \pi^i q_{ij}, \forall i, j (i \neq j) \quad (5)$$

식(5)에서 π^i 는 비율 형태로 표시된 리스크 프리미엄을 의미하며 이러한 가정은 연초 등급에서 연말에 하락하거나 상승하는 경우의 리스크 프리미엄이 동일함을 나타낸다.1) 이제 두 전이확률과 리스크 프리미엄을 포함한 관계식을 행렬로 표시하면 다음과 같이 표현된다.

1) 이 부분은 다소 강한 가정으로 판단되지만 이에 대한 일반화는 추후 연구과제로 남겨둔다.

$$\tilde{Q} - I = \Pi(Q - I) \quad (6)$$

JLT(1997)은 먼저 실제 신용등급 자료를 바탕으로 식(3)의 Q 행렬을 추정하고 채권 자료에서 식(1)의 \tilde{q}_{iK} 를 결정한 후 식(5)를 통하여 π 를 결정하고 이후 식(6)을 통하여 위험중립 전이확률의 나머지 확률 즉, $\tilde{q}_{ij}, \forall i, j \neq K$ 를 결정하였다.

기업 신용등급 평가 경험이 충분히 쌓여 있는 미국이나 유럽 국가들과 달리 국내 신용평가 역사는 상대적으로 짧은 것이 현실이다. 이에 따라 특정 신용등급의 경우, 예를 들어 AAA와 AA 등급의 경우 관찰기간 내에 부도 경험이 없어서 실제 평가결과로 추정된 부도확률이 0으로 표시되는 현상이 나타난다. 이에 대한 보완 및 신용등급별 부도확률을 올바르게 추정하기 위하여 기존 연구에서는 기업의 재무자료와 부도확률간 관계를 비선형 회귀분석 또는 인공지능 신경망 모형 등을 이용하여 설정하고 각 신용등급별 부도확률을 추정하는 방법을 구사하였다. 이러한 방법들은 개별 부도확률 추정에서 의미를 갖기는 하지만, 추정된 부도확률을 JLT 모형과 같은 신용등급 전이확률 모형에 적용하는 경우 리스크 프리미엄이 (-)로 나타날 가능성을 배제하지 못하는 단점을 배제하지 못하고 있다. 일반적으로 신용위험관리를 위한 대표적 방법론 중의 하나인 CreditMetrics™을 적용하여 위험채권 포트폴리오의 가치 변동 및 리스크를 평가하는 경우 위험중립 전이행렬의 적용이 필수적이다. 따라서 올바른 위험중립 전이행렬을 추정하기 위하여 그 선행조건인 실제 경험적 전이행렬의 합목적적인 추정은 매우 중요한 문제이다.

본 연구에서는 JLT의 방법론을 채용하여 합리적인 리스크 프리미엄을 추정하고 이를 이용하여 경험적으로 0인 부도확률에 보다 의미있는 값을 설정하는 방법을 제시한다. 제시하는 방법의 세부 절차는 먼저 경험 자료를 바탕으로 실제 전이확률 빈도를 추정하고 0보다 큰 부도확률을 갖는 신용등급에 대하여 위험중립 부도확률을 결정한다. 이 두 확률 집단간 비율을 적절한 함수를 선택하여 추정하고 추정된 함수를 통하여 제외된 신용등급의 리스크 프리미엄을 외삽(extrapolation)으로 구한 결과와 위험중립 부도확률 결과를 결합하여 역으로 실제 경험적 부도확률을 결정하는 방식이다.

III. 실제 전이행렬 추정

분석 자료는 NICE신용평가에서 2001년부터 2015년까지 평가한 4503개 기업 등급 정보이며, 고려 대상 신용등급은 AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D 의 8개 등급이다. 각 자료는 연초 등급과 연말 등급이 표시되어 있으며 이를 바탕으로 각 등급별 전이 확률을 추정한 결과는 <표 1>과 같고 추정식은 다음과 같다.

$$q_{ij} = \sum_k N_{ij,k} / \sum_k N_{i,k} \quad (6)$$

여기서, $\sum_k N_{ij,k}$ 는 시기에 상관없이 연초 i 등급에서 연말 j 등급으로 전이한 경우의 수를 나타내며, $\sum_k N_{i,k}$ 는 연초 i 등급 기업중 연말에 등급 평가를 철회하지 않은 기업수를 나타낸다. 기업이 등급평가를 철회하는 이유는 채권을 발행할 사유가 소멸한 것인데 이는 자금을 다른 경로로 조달하였거나 또는 신용 하락으로 자금 조달 비용의 대폭 상승이 예상되는 경우이다. 이에 대한 별도의 정보가 없는 한 철회기업은 제외하고 분석하는 것이 기존 연구에서 나타나는 일반적인 경향이므로 본 연구에서도 제외하였다.

<표 1> 신용등급 전이행렬 추정결과

t	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
$t-1$								
AAA	0.9963	0.0037	0	0	0	0	0	0
AA	0.0163	0.9506	0.0333	0	0	0	0	0
A	0	0.0720	0.8886	0.0351	0.0017	0	0.0009	0.0017
BBB	0	0	0.0822	0.8621	0.0265	0.0066	0.0119	0.0106
BB	0	0	0	0.0559	0.8137	0.0559	0.0093	0.0652
B	0	0	0	0.0060	0.0298	0.7738	0.1071	0.0833
CCC	0	0	0	0	0.0270	0.0811	0.7027	0.1892
D	0	0	0	0	0	0	0	1

자료 : NICE신용평가

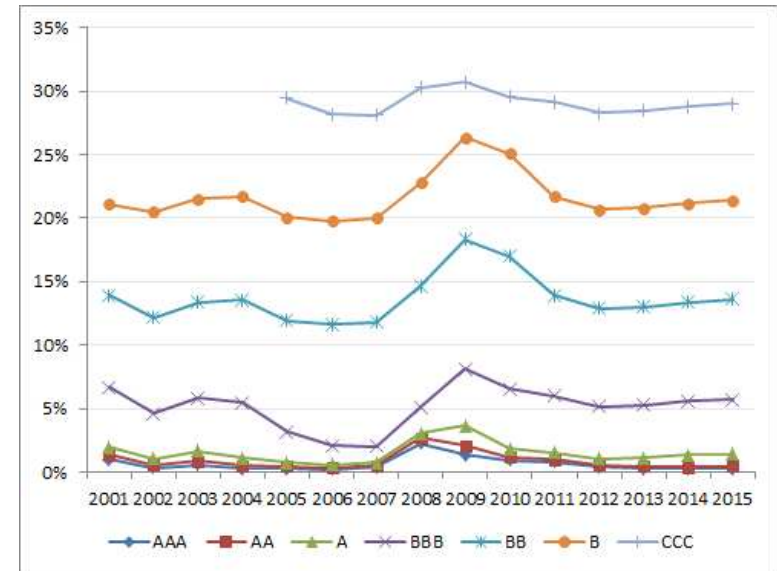
<표 1>의 전이행렬에서 가로축의 A 등급에 해당하는 행의 원소들은 기초에 A 등급인 기업이 기말에 AAA부터 부도(D) 등급까지 전이되는 확률을 나타내는 것으로 경험자료에서 A 등급 기업이 기말에 동일 등급을 유지할 확률은 88.86%, 파산할 확률은 0.17%로 나타나고 있다. 가로축 마지막 행의 D는 일단 파산한 기업은 회생하지 못하고 계속 파산상태에 놓여있게 됨을 나타낸다. 표에서 나타나는 사실은 기업의 신용등급이 높을수록 등급 유지 확률이 높게 나타나며 AAA와 AA 등급 기업은 경험적으로 부도난 사실이 없었다는 점이다. 일반적으로 BBB 이상의 등급을 투자등급(Investment Grade), 그 미만 등급을 투기등급(Junk Grade)라 칭한다. 일반적으로 경기가 호황일 경우 등급 유지 확률 즉, 주대각원소의 좌하향 확률들의 값이 상대적으로 높아지고 불황일 경우 우상향 확률들의 값이 상대적으로 높아진다. 한편, 경험적 부도확률은 자료의 수 또는 모집기간에 비례하는 경향이 있으므로 제시된 부도확률은 잠재적 부도확률에 비하여 과소 추정되는 경향이 존재한다. 여기서 잠재적 부도확률의 대응치로 위험중립 부도확률을 고려할 수 있다.

신용등급이 필요한 이유는 기업들이 자금조달을 위해 회사채를 발행하는 경우 변제 가능성에 따라 신용가산금리에 차등을 두기 위해서이다. 즉, 신용등급이 높을수록 낮은 채권금리 적용을 가능하게 하여 보다 적은 비용으로 자금을 조달하는 것이 가능하게 된다. 이러한 회사채는 채권시장에서 사자(Buy)와 팔자(Sell) 주문 호가가 일치하는 경우 거래가 성사되고 매일 최종가격이 변동하게 된다. 채권시장에서는 가격을 매수시점 기대되는 수익률 단위로 표시하게 되는데 이러한 수익률을 만기수익률(Yield-to-Maturity) 이라 한다. 여기서 신용가산금리는 평가시점 동일만기 회사채 만기수익률과 국채 만기수익률의 차이로 결정된다. 즉, 신용가산금리란 기업의 부도가능성에 대한 수익률 보상(Yield Compensation)을 의미한다. 이러한 수익률 보상은 만기까지의 장래에 발생할 모든 위험들을 반영하므로 이 정보를 바탕으로 역산한 부도확률은 모든 리스크를 사전적으로 고려하고 있다고 볼 수 있다. 이에 반해 경험적 부도확률은 사후적으로 실현된 부도 사건만을 반영하게 되므로 일반적으로 위험중립 부도확률에 비하여 작은 경향이 나타나게 된다.

채권 거래가 매순간 발생하므로 그에 따른 채권 수익률 자료는 매순간 산출하는 것이 이론적으로 가능하지만 일반적으로 채권평가사는 그날의 거래 결과중 의미있는 최종

결과를 선별하여 매일매일의 채권 수익률 자료를 발표하고 있다. 다음의 <그림 1>은 전문 채권 및 자산 평가기관인 NICE PNI에서 추정한 국제 및 각 신용등급별 수익률 자료의 연별 평균 수익률을 식(1)에 대입하여 위험중립 부도확률을 계산한 결과이다. 여기서 회수율은 50%를 가정하였다.

<그림 1> 신용등급별 위험중립 부도확률 추이

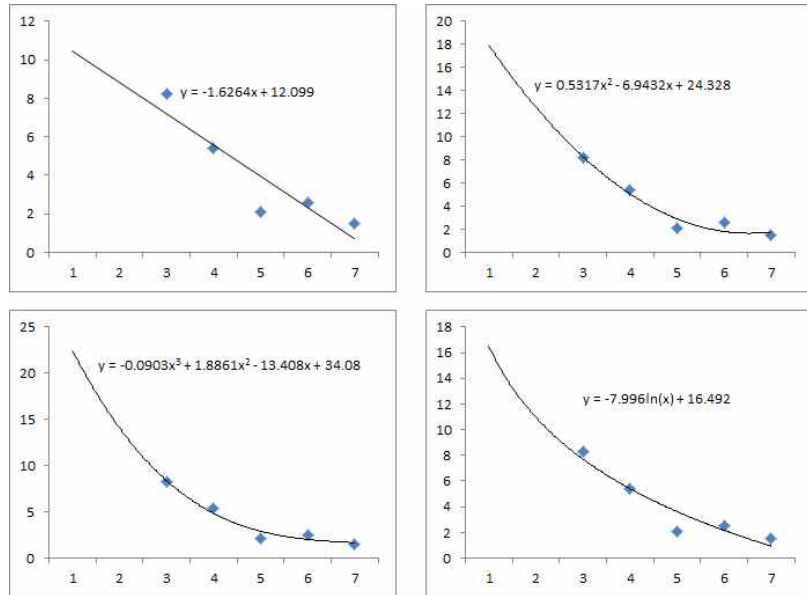


자료 : NICE PNI 수익률 자료를 바탕으로 저자 계산

위험중립 부도율 추이에서 나타나는 특징적 현상은 다음과 같다. 첫 번째는 2015년 부도율이 관측기간 평균값에 비하여 BBB 등급을 제외하면 모두 작게 나타나고 있는 점이고 두 번째는 A 이하 등급이 2012년 이후 완만한 상승세를 유지하고 있다는 점이다. 한편, CCC 등급 수익률 정보가 2005년부터 제공되므로 위 그림에서 제외되었다. 위험중립 부도확률 추이와 절대값은 향후 채권시장 및 거시경제를 조망하는 또다른 정보를 제공하지만 이부분은 추후 연구에서 살펴보기로 한다. 본 연구에서는 관측기간 중 가장 최근인 2015년 수익률 자료로 계산한 위험중립 부도확률과 앞에서 추정한 실제 경험적 부도확률중 A부터 CCC 까지 5개 등급의 부도확률간 연관관계에서 리스크

프리미엄을 추정하였는데 다음의 <그림 2>는 각각 1차부터 3차까지의 다항식과 로그함수를 이용하여 추정한 결과를 나타내고 있다.

<그림 2> 리스크 프리미엄 추정결과



그림에서 나타나는 리스크 프리미엄의 특징은 신용등급이 높아질수록 리스크 프리미엄이 커지는 것으로 나타나고 있는데 JLT의 리스크 프리미엄은 통상적인 리스크 프리미엄과 역의 관계가 존재함을 짐작할 수 있다. 7개 신용등급의 경우 자료수가 작아서 자유도에 문제의 소지가 있을 수 있지만 노치(notch)별 신용등급 즉, AAA, AA+, ..., CC-, C 등급으로 계산한 결과에서도 보다 강력한 크기 순위가 나타남을 확인 할 수 있다. <그림 2>의 결과에서 3차 다항식의 결과가 가장 성과가 좋은 것으로 나타나고 있지만 리스크 프리미엄의 크기 순위가 위배될 가능성이 있으므로 본 연구에서는 다음의 로그함수 추정결과를 사용하였다. <표 2>는 추정결과를 나타내고 있다.

$$\pi^i = \beta_0 + \beta_1 \ln(i) + \epsilon_i \quad (7)$$

<표 2> 리스크 프리미엄 회귀식 추정결과

	추정값	표준편차	확률값
β_0	16.4926	4.4548	0.0001
β_1	-7.9961	2.7934	0.0021
$R^2 = 0.9002$			

위 식에서 β 는 회귀 계수를 의미하며 i 는 AAA는 1, AA 는 2를 부여하는 방식 즉, 숫자로 표시한 등급을 나타내는데 보다 엄밀한 분석을 위해서는 각 신용등급별 신용점수를 이용하는 방법을 고려할 수 있다. 이후의 분석에서는 위 회귀식의 결과로 추정된 등급별 리스크 프리미엄을 적용한다. 회귀식으로 추정된 리스크 프리미엄을 식(5)에 대입하여 새로 추정한 경험적 실제 부도확률은 다음 <표 3>에 제시하였다.

<표 2> 부도확률 추정결과

등급(i)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
추정확률	0.0002	0.0004	0.0018	0.0106	0.0376	0.0988	0.3111
실제확률			0.0017	0.0106	0.0652	0.0833	0.1892
추정 π^i	16.4926	10.9502	7.7080	5.4077	3.6234	2.1655	0.9329
실제 π^i			8.2564	5.3880	2.0904	2.5687	1.5341

위험중립 부도확률을 반영한 실제 경험적 전이행렬을 생성하는 방법은 여러 가지가 존재하지만 본 연구에서는 실제 추정된 이산형(discrete) 전이행렬에서 리스크 프리미엄을 반영한 부도확률 부분을 보정한 방식과 연속형 전이행렬을 적용하여 생성자 행렬(generator matrix)의 이상치를 보정하는 두 가지 방법을 추가하여 총 3가지 전이행렬을 생성하고 비교한다.

연속형 전이행렬 모형은 기존의 전이행렬을 생성자(generator) 행렬로 변환한 모형을 사용한다. 즉, 이산형 전이행렬 모형에서는 다기간 전이행렬을 기본 전이행렬을 누적 제공하여 얻게 되지만 연속형 전이행렬 모형에서는 생성자에 기간 첨자를 변환하는

것으로 다기간 전이행렬을 생성시키는 것이 가능하게 된다. 이 관계는 다음 식으로 표현된다.

$$Q(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k / K! \quad (8)$$

위 식에서 좌변은 전이행렬이며 중간항과 우변항의 A 는 생성자 행렬을 의미하며 t 는 시간을 나타내는 것으로 1은 1년, 0.25는 1분기, 2는 2년을 의미한다. 생성자 행렬은 다음과 같은 구조를 갖는다.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \dots & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

생성자 행렬의 원소들중 $\lambda_{ij} \geq 0$ 이며 $\lambda_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^K \lambda_{ij}$ 가 성립한다. 일반적으로 식(8)이 등식으로 성립하기 위해서는 좌변의 전이행렬이 몇가지 조건을 갖추어야 한다.2) 그중 대표적인 성질이 경로 통합성(embeddability)이다. 이 것은 <표 1>의 전이행렬에서 AA에서 A로의 전이확률과 A에서 BBB로의 전이확률은 0보다 크지만 AA에서 BBB로 전이할 확률은 0으로 나타나고 있는데 이렇게 경로를 우회한 도달 가능성이 직접 도달 가능성과 일치해야 한다는 즉, AA에서 BBB로 전이할 확률도 0보다 크게 나타나는 경우 달성 된다. 이 기준에 의하면 <표 1>의 전이행렬은 경로 통합성이 위배된 것이고 이런 경우 이 전이행렬에 해당하는 올바른 생성자 행렬은 존재하지 않는다. 이 사실은 전이행렬에 대하여 식(8)의 행렬 지수함수의 역함수 즉, 행렬 대수함수를 적용하여 계산한 생성자 행렬에서 주대각 이외의 원소들중 음수의 존재 여부로 확인이 가능하다. 이 부분을 보정하기 위한 여러 가지 방법이 존재하지만 본 연구에서는 JLT(1997)와 Israel 외(2001)이 제시한 방법을 적용하여 전이행렬을 생성하였다. 두 연구의 보정 방법은 다음과 같다.

2) 이와 관련된 자세한 논의는 Israel외(2001)에 제시되어 있다.

JLT(1997)

$$\begin{cases} \lambda_{ii} = \log q_{ii} \\ \lambda_{ij} = \frac{q_{ij} \log q_{ii}}{q_{ii} - 1} \end{cases}$$

Israel 외(2001)

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{ij} = \max(\lambda_{ij}, 0), \quad j \neq i \\ \tilde{\lambda}_{ii} = \lambda_{ii} + \sum_{j \neq i} \min(\lambda_{ij}, 0) \end{cases}$$

두 방법을 적용하기 이전 리스크 프리미엄을 추정하여 계산한 부도확률을 적용한 전이행렬 추정결과는 다음과 같다.

<표 3> 신용등급 전이행렬: 리스크 프리미엄 보정

t	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
$t-1$								
AAA	0.9961	0.0037	0	0	0	0	0	0.0002
AA	0.0161	0.9502	0.0333	0	0	0	0	0.0004
A	0	0.0720	0.8885	0.0351	0.0017	0	0.0009	0.0018
BBB	0	0	0.0822	0.8621	0.0265	0.0066	0.0119	0.0106
BB	0	0	0	0.0576	0.8377	0.0576	0.0096	0.0376
B	0	0	0	0.0059	0.0293	0.7607	0.1053	0.0988
CCC	0	0	0	0	0.0230	0.0689	0.5970	0.3111
D	0	0	0	0	0	0	0	1

위 표에서 오른쪽 끝열의 부도확률은 리스크 프리미엄 추정치에 의해 다시 계산한 결과이고 그 왼쪽의 전이확률들은 각 행별로 $1 - q_{iK}$ 를 보정전 확률의 비중으로 배분하여 적용한 결과이며 이 행렬이 첫 번째 전이행렬 추정값이다. 이를 바탕으로 생성자 행렬을 계산한 결과는 다음의 <표 4>와 같다.

<표 4> 보정전 생성자 행렬

$t-1$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0.0039	0.0038	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
AA	0.0165	-0.0525	0.0363	-0.0007	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
A	-0.0007	0.0785	-0.1216	0.0402	0.0014	-0.0002	0.0008	0.0016
BBB	0.0000	-0.0037	0.0942	-0.1513	0.0309	0.0064	0.0159	0.0077
BB	0.0000	0.0002	-0.0032	0.0677	-0.1795	0.0717	0.0072	0.0360
B	0.0000	0.0000	-0.0003	0.0061	0.0344	-0.2822	0.1566	0.0853
CCC	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0014	0.0306	0.1014	-0.5246	0.3939
D	0	0	0	0	0	0	0	0

<표 5> 보정된 생성자 행렬: JLT(1997, 위)와 Israel외(2001, 아래)

$t-1$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0.0039	0.0037	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
AA	0.0165	-0.0510	0.0341	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
A	0.0000	0.0763	-0.1182	0.0372	0.0018	0.0000	0.0009	0.0019
BBB	0.0000	0.0000	0.0885	-0.1484	0.0285	0.0071	0.0128	0.0114
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0628	-0.1771	0.0628	0.0105	0.0411
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0067	0.0334	-0.2735	0.1204	0.1130
CCC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0294	0.0882	-0.5158	0.3982
D	0	0	0	0	0	0	0	0

$t-1$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0.0039	0.0038	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
AA	0.0164	-0.0528	0.0360	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
A	0.0000	0.0782	-0.1220	0.0400	0.0014	0.0000	0.0008	0.0016
BBB	0.0000	0.0000	0.0931	-0.1532	0.0305	0.0063	0.0157	0.0076
BB	0.0000	0.0002	0.0000	0.0671	-0.1811	0.0710	0.0072	0.0357
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0061	0.0344	-0.2823	0.1565	0.0852
CCC	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0306	0.1012	-0.5253	0.3934
D	0	0	0	0	0	0	0	0

<표 5>의 생성자 행렬은 주대각원소 외에 음의 생성자를 포함하고 있지만 <표 5>의 생성자 행렬은 이러한 이상치가 보정된 것을 확인 할 수 있다. 두 보정방법은 등급별 부도확률에 대응하는 생성자에도 영향을 미치므로 값들이 조금씩 차이를 나타내는데 JLT(1997)에 비하여 Israel외(2001)의 방법이 보정전 생성자 행렬의 부도확률 생성자와 보다 유사한 값을 나타내고 있다. 이러한 생성자 행렬을 이용하여 전이확률을 다시 계산한 결과를 <표 6>에 제시하였는데 이 표에서 부도확률도 Israel외의 방법이 <표 3>의 부도확률과 보다 유사하게 나타남을 확인 할 수 있다.

<표 6> 보정된 전이행렬: JLT(1997, 위)와 Israel외(2001, 아래)

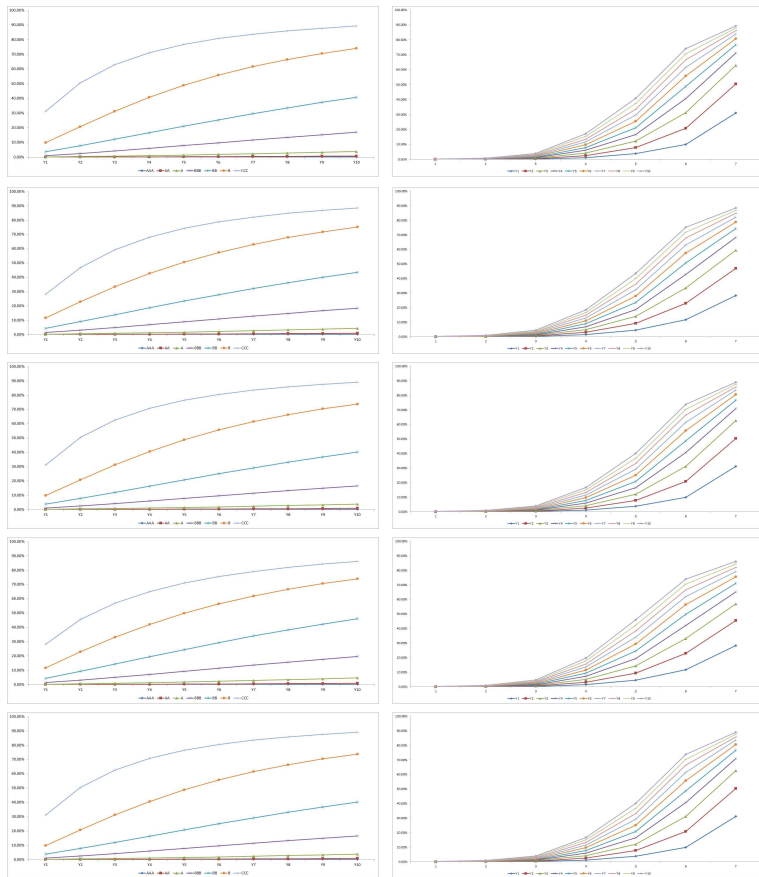
$t-1$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9962	0.0036	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
AA	0.0160	0.9515	0.0314	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
A	0.0006	0.0702	0.8911	0.0327	0.0020	0.0002	0.0009	0.0023
BBB	0.0000	0.0030	0.0775	0.8643	0.0246	0.0070	0.0098	0.0137
BB	0.0000	0.0001	0.0024	0.0536	0.8394	0.0508	0.0105	0.0432
B	0.0000	0.0000	0.0003	0.0063	0.0281	0.7653	0.0817	0.1183
CCC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0220	0.0604	0.6006	0.3160
D	0	0	0	0	0	0	0	1

$t-1$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9961	0.0037	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
AA	0.0160	0.9499	0.0331	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
A	0.0006	0.0717	0.8881	0.0350	0.0017	0.0002	0.0009	0.0018
BBB	0.0001	0.0033	0.0813	0.8605	0.0262	0.0065	0.0118	0.0104
BB	0.0000	0.0002	0.0027	0.0570	0.8363	0.0570	0.0095	0.0373
B	0.0000	0.0000	0.0003	0.0059	0.0292	0.7606	0.1052	0.0987
CCC	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0229	0.0688	0.5966	0.3106
D	0	0	0	0	0	0	0	1

<그림 3>은 3개 전이확률 결과에 대하여 누적제곱으로 계산한 부도확률과 연속형 전이행렬 모형을 적용하여 생성자에 곱해지는 기간을 변경하여 미래 전이확률중

부도확률을 계산한 결과이다. 5개 방식에 의한 미래 부도확률에서는 등급간 역전 현상이 발생하지 않으므로 의미있는 부도확률로 볼 수 있을 것으로 판단된다.3)

<그림 3> 등급별 경과년별 부도확률 추이



좌측은 각 등급의 미래 경과년별 부도확률을, 우측은 각 경과년의 신용등급별 부도율을 나타내며 위에서 아래로 각각 리스크 프리미엄만 보정후 누적제곱, JLT 보정후 누적제곱, Israel의 보정후 누적제곱, JLT보정후 생성자 기간조정, Israel의 보정후 생성자 기간조정 방식으로 생성한 전이행렬을 의미함

3) 물론 보다 엄밀한 적합성에 대한 판단은 추후 연구과제로 남겨둔다.

V. 결 론

본 연구는 JLT(1997)의 전이행렬 모형을 이용하여 다소 단순한 비교유추를 통하여 기업의 등급별 부도확률을 결정하는 방법을 제시하고 있다. 제시한 결과는 신용 가치 평가 및 리스크 관리에서 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다. 본 연구의 한계점으로는 방법의 성과에 대한 비교가 다소 미흡한 부분과 전체 기간에 대하여 단 하나의 전이확률만을 추정한 것이다. 이러한 한계점은 추후에 보다 엄밀한 실증분석을 통하여 해결될 수 있을 것으로 판단되며 또한 제시한 방법론이 특정 시기에 한정되지 않으므로 경기 국면에 맞춰 보다 정확한 성장기 및 쇠퇴기 전이행렬 및 부도확률을 추정하는 것이 가능할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- Israel, R. B., Rosenthal, J. S., Wei, J. Z., "Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings," *Mathematical Finance* 11, 245-265. 2001.
- Jarrow, R.A., Lando, D. and Turnbull, S.M., "A Markov model for the term structure of credit risk spreads," *The Review of financial Studies*, 10, 481-523, 1997.
- Yasunari, I., "Estimating Continuous Time Transition Matrices From Discretely Observed Data," Bank of Japan manuscript, 2006.