

# 보험부채 공정가치 평가목적 할인율에 관한 연구\*

## A Study on Discount Rates for Fair Valuation of Insurance Liabilities

노 건 엽\*\* (Geonyoup Noh)

장 봉 규\*\*\* (Bonggyu Jang)

태 현 옥\*\*\*\* (HyeonWuk Tae)

### < 목 차 >

I. 서론

II. 할인율 기간구조 산출 방안

III. 시나리오 산출 모형

IV. 보험부채 평가

V. 결론

### < 국문초록 >

유럽의 Solvency II 시행(2016년), IFRS4 2단계 도입(2020년 예정) 등 보험부채에 대한 평가는 원가평가에서 공정가치평가로 변화되고 있다. 본 연구는 보험부채 공정가치 평가 요소 중 국내환경에 적합한 할인율 산출 방법론을 제안하고 보험부채의 영향을 분석하였다.

무위험수익률로 국고채를 선정하고, 최종 관찰기간은 만기 20년으로 하

\* 본 논문은 2015년 한국보험학회 선도연구과제의 지원을 받아 연구되었으며 또한 2014년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구(NRF-2014S1A3A2036037)임.

\*\* 제1저자, 보험개발원 통계학박사 (gynoh@kidi.or.kr)

\*\*\* 공동저자, POSTECH 산업경영공학과 교수 (bonggyujang@postech.ac.kr)

\*\*\*\* 교신저자, POSTECH 산업경영공학과 박사과정 (taehy@postech.ac.kr)

였다. 유동성 프리미엄은 기존 연구와 달리 산금채를 이용한 Covered Bond 방법을 제시하였다. 또한, 최저보증가치가 포함된 보험부채 평가를 위한 공시이율 및 할인율 시나리오 산출방법을 제안하였다. 산출된 할인율은 금리확정형과 금리연동형 상품에 각각 적용하여 현행 발행연도방식 책임준비금과 비교하였다.

보험부채 공정가치 평가에 따른 자본의 변동성 확대가 예상되므로 보험회사의 재무건전성 관리를 위한 사전적인 대비로 자본 확충, 전문인력 확보의 필요성을 제안하였다.

국문색인어 : 솔벤시 2, 보험계약 국제회계기준, 유동성 프리미엄, 할인율

### < Abstract >

Solvency II (in Europe, 2016) and IFRS4 phase II (in Korea, 2020) implementation suggests that the insurance liabilities be evaluated by fair value measurement, not by cost evaluation. This paper studies methods to calculate the discount rate of insurance liabilities fit for Korean market environment, which is crucial for fair value measurement. This paper also analyzes the impact of the newly derived discount rate to the value of insurance liabilities.

To calculate the risk free rate, we use the treasury bonds up to the maturity of 20 year. Unlike literatures, to calculate the liquidity premium, we first suggest the Covered Bond Method fit for Korean environment, in which the industrial finance bond is a substitute for the covered bond. We also suggest methods to generate declared interest rate and discount rate scenarios to evaluate insurance liabilities including guaranteed minimum value. We apply the newly derived discount rate to fixed and floating interest rate insurance products to compare with legal liability reserve, calculated by currently applied cost evaluation.

Our results show that the volatility of the capital will increase if

the fair value measurement is implemented, so we suggest that expansion of the capital, development of experts are needed to manage the financial soundness of insurance companies.

Key Words : Solvency II, IFRS4, Liquidity Premium, Discount rates

## I. 서론

최근의 해외 감독제도는 보험부채에 대해 공정가치 평가를 도입하거나 준비 중에 있다.

국제보험감독자 협의회(IAIS; International Association of Insurance Supervisors)는 국제적 보험그룹(IAIG)<sup>1)</sup>에 적용할 국제 보험자본 기준(ICS; Insurance Capital Standard)을 2020년에 적용할 예정으로 자산뿐만 아니라 보험부채에 대해 공정가치로 평가하는 방안을 준비중이다<sup>2)</sup>. 이는 국제적으로 활동하는 일부 보험사에만 적용할 계획이나 향후 지급여력의 국제적인 표준으로 발전할 가능성이 높아 보인다.

유럽 보험연금감독청 (EIOPA; European Insurance and Occupational Pensions Authority)은 2016년 1월 1일부터 새로운 리스크 감독체계인 Solvency II를 적용한다고 발표<sup>3)</sup>하였다.

Solvency II의 가장 두드러진 특징은 리스크 중심의 경제적 요구자본 개념을 도입한 것으로 자산뿐만 아니라 보험부채도 공정가치로 일관성있게 평가하는 것이다.

이와 같은 보험부채 평가에 대한 국제적 변화에 따라 금융감독원은 보험부채를 공정가치로 평가하는 감독회계 방안에 대한 논의를 시작한다고 발표<sup>4)</sup>하였다.

또한, 일반회계에서 보험부채를 시가로 평가하는 IFRS4 2단계가 2020년에 도입될 예정으로 보험부채에 대한 공정가치 평가는 감독

---

1) 국제성과 규모에 따라 선정된 보험그룹으로 국제성은 3개국 이상에서 보험료를 수취하고 수입보험료의 해외 비중이 10%이상이며, 규모는 총자산 500억 달러 이상 또는 총 수입보험료 100억 달러 이상이어야 한다.

2) 금융감독원, 재무건전성 규제환경변화에 대응한 국내 보험회사 재무건전성 감독방향, 제 8회 국제보험산업 심포지엄, 2015.10.21

3) EIOPA, SOLVENCY II IS GOING LIVE, 2016.1.4

4) 금융감독원, 보험계약 국제회계기준(IFRS4) 2단계 도입과 대응, 한국회계학회·금융감독원, 2015.12.21

회계뿐만 아니라 일반회계에서도 적용되어 보험산업에 큰 영향을 미칠 것으로 예상된다.

최근 언론 기사<sup>5)</sup>를 보면 IFRS4 2단계 도입시 보험사가 필요한 자본을 42조 ~52조라고 추정하는 등 보험산업에 미치는 영향이 막대할 것으로 보인다.

이러한 보험부채 평가요소 중 할인율은 평가시점의 시장가치를 반영하여 미래 현금흐름을 현재가치로 전환함으로써 보험부채 평가액을 결정하는 핵심적인 요소이다.

IFRS4에서 보험계약 산출은 이행가치(fulfillment value)를 측정하는 것으로 공정가치(fair value) 측정과는 달라 할인율 산출방법이 Solvency II 등 지급여력제도와는 상이할 것으로 생각될 수 있으나, IASB(2014)는 위험조정과 계약서비스 마진 등은 공정가치 측정과 상이하나 화폐에 대한 시간가치를 측정하는 할인율은 공정가치 측정방법과 보험계약의 측정방법이 일치한다고 하였다.

Solvency II는 감독목적 달성을 위해 산출방법이 구체적이나 IFRS4 2단계는 할인율 산출에 대한 원칙만 제시할 뿐 세부적인 산출기준을 제시하지는 않고 있으며, 국내의 새로운 지급여력제도도 이제 논의를 시작하는 단계로 구체적인 산출기준에 대한 검토가 필요한 시점이다.

따라서, 본 연구에서 Solvency II 등 해외사례를 참고하여 IFRS4 2단계 도입시뿐만 아니라 국내 신 지급여력제도 산출시에도 도움이 될 수 있도록 국내 환경에 적합한 할인율 산출방법을 제시하고자 한다.

그간 보험부채 평가를 위한 연구는 현행 우리나라 발행연도 방식 보험부채 평가기준과의 차이점을 분석하면서 Solvency II 및 IFRS4 2단계 적용시 보험부채 평가액에 대한 영향을 개략적으로 추산해 보는 것에 중점을 두었다. (윤영준, 2011; 오창수 등 2013; 조재린 ·

---

5) 매일경제(2015년 9월 22일), '위기의 보험산업', 머니투데이(2016년 1월 7일), '보험사 자본 증발위기, 컨트롤 타워가 없다'.

김해식, 2015). 할인율에 대한 구체적인 산출방법은 최근에 이루어지고 있다. 노건엽·박경국(2014)이 무위험수익률 기간구조 추정예 Smith-wilson 방법을 이용하고, 유동성 프리미엄 산출시 신용부도 스왑을 이용한 방법을 제시하며 실제 시장정보를 이용하여 보험부채를 평가하였다. 주호찬 등(2015)이 자산과 부채 현금흐름의 발생 시점 불일치로 정의되는 유동성 리스크를 보험에 적용한 유동성 프리미엄 측정방안을 제시하였다.

한편, 현재의 보험 부채는 보험상품에 내재된 최저보증이율 등의 보증 및 옵션을 평가하지 않지만 Solvency II 및 IFRS4 2단계 하에서는 보험계약에 내재된 보증 및 옵션도 평가하여야 한다. 이에 대한 평가를 위해서는 이자율 모형 등을 이용한 시나리오가 필요하다.

보증 및 옵션에 대한 연구는 주로 변액보험의 최저보증 위주 (엄영호·김계홍 2009; 권용재, 2010; 노건엽 2014)로 이루어졌으며 금리연동형 상품의 최저보증에 대한 연구가 최근에 진행되고 있다.

이에 관한 연구로 오창수·이윤구(2010)는 금리연동형 보장성 보험의 최저보증이율에 대한 문제점을 살펴보고 Black-Karasinski 모형을 이용하여 최저보증이율의 보증비용을 산출하였다 이항석(2013)은 CIR 모형을 이용하여 금리연동형 연금보험과 종신보험의 이차손익 구조 및 이자율 보증옵션의 가치와 리스크를 분석하였다.

부채평가를 위한 할인율 산출을 위해서는 무위험수익률 기간구조, 유동성 프리미엄 그리고 시나리오 생성 모형이 필요하다.

본 연구는 국내 상황에 적합한 무위험수익률 선정과 무위험 수익률 기간구조를 추정하고 이론적 타당성을 유지하면서 실무적으로 적용가능한 유동성 프리미엄 산출방안을 제시한다. 또한 최저보증이율가치가 포함된 금리연동형 보험상품 평가를 위해 시나리오 생성 모형을 제시하고, 국내 대표적인 보험상품에 적용함으로써 보험부채 평가시 할인율에 대한 영향을 실증분석을 하고자 한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이자율 산출 방안을 제시하고 3장에서 공시이율 및 할인율 시나리오 산출 모형을 설명한

다. 4장은 이렇게 산출된 할인율을 국내 대표적인 보험상품에 적용하여 부채 평가결과를 현행 준비금과 비교한다. 마지막으로 5장에서는 본 연구의 결과를 요약하고 결론을 제시한다.

## II. 할인율 기간구조 산출 방안

보험 부채의 공정가치 평가를 위한 할인율이란, 보험 부채의 현금 흐름을 시장과 일치(market-consistent)된 방법을 이용하여 현재가치를 산출하는 수익률을 말한다.

IFRS4 2단계 하에서 할인율을 산출하기 위한 방법으로 IASB(2013)는 두 가지 방안을 제시하고 있다. 첫 번째는 상향 접근법으로써, 무위험 수익률에 보험 부채의 특성을 반영한 요소(유동성 프리미엄)를 가산하여 할인율을 산출하는 방법이다. 두 번째는 하향 접근법으로써, 보험회사의 자산의 기대 수익률에서 보험부채와 관련 없는 요소(신용리스크 프리미엄 등)을 차감하여 산출하는 방법이다.

본 연구에서는 산출방법이 비교적 명확하고 실무적으로 적용이 용이한 상향접근법을 중심으로 논의한다.

상향접근법을 적용한 보험부채 할인율 산출을 위해서는 다음에 대한 논의가 필요하다.

국내 상황에 적합한 무위험수익률 선정 및 선정된 무위험수익률의 최대 관찰기간을 결정하여야 한다. 또한 시장에서 관찰되지 않는 기간에 대한 무위험수익률 추정이 필요하며 보험부채 특성을 고려한 유동성 프리미엄을 산출해야 한다. 이후 무위험수익률에 유동성 프리미엄 가산하는 방법에 대한 검토가 필요하다.

또한, 최저보증가치가 포함된 금리연동형 상품의 보험부채 평가를 위해 할인율 및 공시이율 시나리오 산출 모형이 필요하다.

### 1. 무위험 수익률 기간구조

## (1) 무위험 수익률 선정

일반적으로 무위험수익률로는 국고채 수익률과 이자율 스왑을 고려한다. EIOPA(2015)에서 국가별로 무위험수익률을 선정하는데 기본적으로 이자율 스왑을 사용하나 일부 국가<sup>6)</sup>에 한하여 국고채를 적용한다.

국고채와 이자율 스왑의 차이를 보면 IAA(2013)는 안정적인 국가가 발행하는 채권은 무위험수익률로 평가가능하나 국가부도위험(Sovereign Risk), 정치적 환경, 세금 등의 영향이 반영되어 국채 자체가 시장상황을 잘 반영하는 무위험수익률로 평가되기 어려울 수 있다. 반면, 이자율 스왑은 자산의 복제 또는 파생상품 헤지 등에 사용되어 시장상황을 충실히 반영할 수 있으나 이자 지급에 대한 신용리스크가 존재하여 이자율 스왑을 그대로 사용하지 않고 신용위험에 대한 조정이 필요하다<sup>7)</sup>. Solvency II에서는 이자율 스왑에서 신용리스크를 차감하는 값으로 10~35bp를 제안하며 한국은 35bp를 신용리스크조정 값으로 제시하였다<sup>8)</sup>.

국내 환경에 적합한 무위험이자율을 선정하기 위해 국고채와 이자율 스왑 거래량을 비교하였다. <표 1>에서 국고채가 이자율스왑(IRS)에 비해 700~1,100조가량 거래량이 더 많고 특히 보험사는 은행이나 증권에 비해 IRS의 거래가 극히 미미한 것으로 나타났다.

이에 따라 본 연구에서는 국고채를 무위험수익률로 선정하는 것이 적절하다고 판단한다.

---

6) 53개국 중 9개국(크로아티아, 헝가리, 아이슬란드, 폴란드, 루마니아, 브라질, 인도, 멕시코, 대만)에 대해 국고채를 적용한다.

7) IAA(2013)을 참고하였다.

8) EIOPA(2015)를 참고하였다.



<표 1> 거래량 비교

(단위:조원)

구분	'12년	'13년	'14년				
			은행	증권	보험	기타	
국고채	3,420	3,697	2,955	329	1,989	175	269
IRS	2,320	2,588	2,259	1,897	359	0.1	3

자료 : 금융투자협회, 금융감독원 파생상품거래현황

한편, 관찰되는 무위험수익률 중 거래량이 풍부하고 유동성이 높은 관찰기간까지만 무위험수익률로 사용하는 것이 적절하다고 Solvency II에서는 제안하고 있다.

이에 따라 <표 2>에서 국고채의 2014년도 거래량을 만기별로 비교한 결과 30년물이 전체 거래량의 1.0%로 타 만기에 비해 거래량이 적다. 또한 만기 30년물은 2012년 9월에 최초 발행되어 2014년말 기준으로는 3년이 채 되지 않아 시장수익률에 대한 신뢰성도 높지 않다. 반면, 만기 20년물은 2006년 1월에 최초 발행후 10년 가까이 거래가 되어 시장수익률에 대한 신뢰성도 높고 30년물에 비하면 2배 이상의 거래량을 보여준다. 따라서 본 연구에서는 만기 20년까지만 관찰값으로 사용하는 것이 적절하다고 판단한다.

노건엽·박경국(2014)은 국고채가 시장에서 거래되는 최종 만기인 30년까지를 이용하여 할인율을 산출하였으나 본 연구에서는 만기 20년까지를 최대 관찰기간으로 설정하여 관찰되는 기간에 대한 신뢰도를 높인 것이 차이점이다. 하지만 시간이 경과함에 따라 만기 30년에 대한 신뢰성 및 거래량이 증가할 것으로 예상되므로 일정시간 경과후 추가적인 검토는 필요하다.

<표 2> 만기별 국고채 거래량(2014년)

(단위:조원,%)

만기	1년	2년	3년	5년	10년	20년	30년	합계
금액	218	214	664	1,044	717	68	30	2,955
비율	7.4	7.3	22.7	35.6	24.5	2.3	1.0	100

자료 : 금융투자협회

(2) 관찰되지 않는 기간 추정

보험 부채는 일반적으로 100년 이상 초장기의 현금흐름을 지나 시장에서 거래되는 무위험수익률은 20년 이하로 한정되므로, 보험부채 평가를 위해서는 20년 이상에 대한 무위험 수익률을 추정하는 보외법(extrapolation)이 필요하다. 또한, 시장에 거래되는 상품들의 종류는 한정되어 있으므로 모든 만기에 대한 무위험 수익률을 구하기 위해서는 보간법(interpolation)을 이용해 구할 필요가 있다. 이 보외법과 보간법을 적용하는 대표적인 방법으로 Nelson-Siegel과 Smith-wilson 방법이 많이 사용되는데 본 연구는 노건엽·박경국(2014)의 제안에 따라 Smith-wilson방법을 선택한다.

Smith-wilson 방법은 스왑이나 채권 등 시장에서 가격이 관찰 가능한 상품이 주어졌을 때, 주어진 만기에 대한 할인 요인(discount factor)함수를 구하는 방법이다. 즉, 주어진 만기  $t \geq 0$ 에 대해, 현재 금융시장에서 관찰 가능한 금융상품 가격을 평가할 때 현재 시장가격을 정확히 도출하는  $t$ 에 대한 할인요인 함수  $P(t)$ 를 결정해주는 방법이다. 이렇게 각 시간에 대한 할인요인 함수를 구하게 되면 해당하는 현물금리 곡선(spot rate curve)과 선도금리 곡선(forward rate curve)을 구할 수 있게 된다. Smith-wilson 방법에 대한 자세한 사항은 CEIOPS(2010b)을 참고하기 바란다.

Smith-wilson 방법을 이용할 경우 장기선도금리(UFR; Ultimate

Forward Rate)와 수렴속도( $\alpha$ )를 결정하여야 한다. 수렴속도는 최종 관찰금리에서 장기선도금리에 수렴하는 속도로 1에 가까울수록 빨리 수렴한다.

EIOPA(2015)에서는 거시경제학적 방법을 이용하여 UFR을 결정하는데 4.2%<sup>9)</sup>를 기본적으로 설정하고 있다. 또한, 수렴속도는 UFR이 [최종관찰만기(LLP; Last Liquidity Point) + 40년]과 60년 중 큰 값에 수렴하도록 값을 역산하여 산출한다.

본 연구는 LLP를 20년으로 결정하였으므로 60년에 UFR이 수렴하도록 수렴속도를 추정하며 UFR은 4.2%로 설정한다. Solvency II의 결과를 인용한 것으로 국내 환경에 적합한 UFR 산출을 위해서는 추가적인 연구가 필요할 것이다.

LLP를 20년으로 하고 장기선도금리 4.2%일 때 최근 5년간 수렴속도를 산출해 보았다. <표 3>에서 보면 국고 20년과 UFR의 차이가 클수록 수렴속도가 빨라지고 차이가 작을수록 수렴속도가 느려짐을 알 수 있다

<표 3> 최종관찰금리에 따른 수렴속도 비교

연도	2010년	2011년	2012년	2013년	2014년	2015년
수렴속도	0.104	0.053	0.127	0.077	0.140	0.20
국고20년 (a)	4.68%	4.00%	3.27%	3.77%	2.80%	2.18%
차이 ( a-4.2% )	0.48%	0.20%	0.93%	0.43%	1.4%	2.02%

9) 4.2%는 기대인플레이션(2.2%)와 기대실질성장율(2.0%)의 합으로 산출되며 일부 국가에 대해서는 3.2%(스위스, 일본 등) 또는 5.2%(브라질, 인도, 멕시코 등)를 적용한다

## 2. 유동성 프리미엄 산출

보험부채의 할인율을 생성하기 위해서는 무위험수익률 외에 또 하나의 요소인 유동성 프리미엄을 산출해야한다.

보험부채에 유동성 프리미엄이 필요한 이유는 단기적인 금융시장의 변동으로 인해 자산의 가치가 하락할 경우 이에 대응되는 보험부채 사이에 발생한 불일치로 인해 회계상 보험사의 부담이 증가하므로 이러한 자산과 부채 평가사이의 불일치를 해소하기 위해 제시된 방안으로 설명(CEIOPS, 2010a; 주효찬 et al., 2015)하고 있다.

보험부채에 대한 유동성 프리미엄을 산출하기 위해서는 대응되는 자산에 대한 유동성 프리미엄을 구한 다음 보험부채에 적합하도록 적절히 조정하는 방법을 주로 사용하며, 이를 적용하기 위한 원칙으로 CEIOPS(2010a)에서 다음과 같이 제시하고 있다.

- ① 부채는 조정된 무위험수익률(risk-free reference rate)로 할인하며, 조정된 무위험수익률은 부채 특성을 고려하여 [기본 무위험수익률 + 유동성 프리미엄]로 표현한다.
- ② 유동성 프리미엄은 회사의 투자전략과는 독립적이다.
- ③ 유동성 프리미엄은 [비유동성 자산 수익률 - 신용리스크 - 기본 무위험수익률]보다 클 수 없다.
- ④ 유동성 프리미엄은 적절한 금융시장의 객관적 데이터로부터 산출되어야 한다.
- ⑤ 자산에 대응되는 유동성 프리미엄이 없다면 부채에 유동성 프리미엄을 적용할 수 없다.

이러한 유동성 프리미엄을 구하는 방법으로는 신용부도스왑(CDS

negative basis) 방법, 구조화 모형(structural model) 방법, 커버드 본드(covered bond) 방법, 프록시(proxy) 방법 등이 있으며 이에 대한 자세한 설명은 CEIOPS(2010a) 및 노건엽·박경국(2014)을 참고할 수 있다.

제시된 방법 중 신용부도스왑방법은 유동성 프리미엄을 회사채 스프레드와 CDS 프리미엄의 차이로써 구하는 방법이며, 커버드 본드 방법은 유동성 위험 정도만 다르고 신용 위험 등 다른 요소가 비슷한 두 채권의 수익률의 차이를 유동성 프리미엄으로 구하는 방법이다.

노건엽·박경국(2014)은 신용부도스왑 방법을 사용해 유동성 프리미엄을 구하였다.<sup>10)</sup> 그러나 신용부도스왑 방법을 이용해 유동성 프리미엄을 산출하는 것은 국내 시장상황을 고려할 때 한계가 있다. 첫째, 유럽을 비롯한 선진국의 경우 CDS 거래량이 활발하여 CDS 프리미엄이 시장의 수요공급에 따라 결정되는 반면에, 한국은 원화 표시 채권에 대한 CDS 계약의 거래가 활발하지 않아 CDS 프리미엄이 이론적으로 산출되어 시장 정보를 제대로 반영하지 못할 수 있다. 둘째, KCDX 지수의 준거기업들은 대부분 신용등급이 AA 이상인 우량 기업들로만 이루어져 있어, 그 이하 등급의 회사채들의 유동성 프리미엄을 산출하기 어려운 점이 있다. 셋째, KCDX 지수가 만약 신뢰할 수 있다고 가정하더라도, KCDX 지수에서 공시되는 지수는 3년물 이내로 제한되어 있어 다른 만기에 대한 유동성 프리미엄 산출할 수 없다. 마지막으로 KCDX 지수는 2013년부터 공시되어 신용부도스왑 방법으로 측정한 유동성 프리미엄의 적절성을 확인하기 위한 과거 데이터가 충분하지 않다.

따라서 본 연구에서는 신용부도스왑 방법의 대안으로 커버드 본드 방법을 이용한 유동성 프리미엄을 산출하는 방법을 제안한다. 커버드 본드 방법은 기본적으로 유동성 요소를 제외하고 나머지 요소(현

---

10) 한국금융투자협회의 KCDX 지수(<http://deriv.kofia.or.kr>)를 이용하였다.

금흐름, 신용도 등)가 동일한 두 금융상품의 수익률을 비교해서 유동성 프리미엄을 산출하는 방법으로 일반적으로 커버드 본드<sup>11)</sup>와 무위험수익률간 차이로 유동성 프리미엄을 산출한다.

$$\text{유동성 프리미엄}_t = \text{커버드본드수익률}_t - \text{무위험수익률}_t. \quad (2)$$

그러나 한국의 경우 커버드 본드 시장이 발달해 있지 않기 때문에, 커버드 본드 자체를 사용해 유동성 프리미엄을 구하는 것이 불가능해 보이거나 커버드 본드의 대용치를 이용하여 유동성 프리미엄을 산출하는 방법을 제안한다.

산금채는 산업금융채권의 약자로서 발행사인 산업은행은 금융기관 중 유일하게 국제 3대 신용평가기관인 무디스에서 Aa3, S&P에서는 A, 피치에서는 A+로 대한민국 정부와 동일한 신용등급을 받고 있다. 그리고 산금채는 한국 산업은행법에 따라 산업은행의 결산손실을 정부가 보전하는 특성<sup>12)</sup>을 가지고 있어 대한민국 국채와 사실상 같은 수준의 신용위험을 보유하고 있다고 볼 수 있다. 특히 산업은행의 결산손실을 정부가 보전하는 성질은 커버드 본드가 다른 특정자산(covered pool)을 담보로써 채권을 발행하는 것과 유사점이 있다고 할 것이다. 한편 산금채 외에도 정부보증이 있는 채권에는 한국은행이 발행하는 통안채와 예금보험공사가 발행하는 예보채가 있어 이를 고려할 수도 있으나 통안채는 만기가 최대 2년으로 짧고 예보채는

11) 커버드본드는 금융회사(주로 은행)가 중장기 자금의 조달을 위하여 주택담보대출 채권과 같은 우량자산을 담보(Cover pool)로 제공하여 발행하는 채권으로 커버드본드의 투자자는 원리금 상환에 대하여 이중청구권을 가지게 된다. 이중청구권이란 투자자는 발행회사에 대하여 일차적인 청구권을 가지며, 발행회사가 파산할 경우 담보자산에 대한 우선적인 청구권을 보장받는 것을 말한다. 따라서, 모기지유동화증권이나 담보부사채에 비하여 채권자보호가 좀 더 강화되어 발행회사의 파산위험으로부터 절연(Bankruptcy insulation)되어 있다. 투자자 입장에서 커버드본드는 무위험자산으로 가정할 수 있어 무위험자산과 커버드본드 수익률 차이는 유동성에 의한 차이로 간주한다.

12) 국가법령정보센터(<http://www.law.go.kr>)에서 자세한 내용을 확인할 수 있다.

거래량이 산금채보다 적어 만기가 20년까지 존재하고 거래량도 상대적으로 많은 산금채가 적절할 것으로 판단한다. 따라서 본 연구에서는 산금채를 이용한 커버드 본드 방법으로 유동성 프리미엄을 산출하는 방법을 제시한다.

$$\text{유동성프리미엄}_t = \text{산금채수익률}_t - \text{국고채수익률}_t. \quad (3)$$

<표 4>는 2015년말의 산금채 수익률에서 국고채 수익률을 차감하여 산출한 결과(0.08~0.171%)로 만기별로 유동성 프리미엄 산출이 가능함을 보여준다.

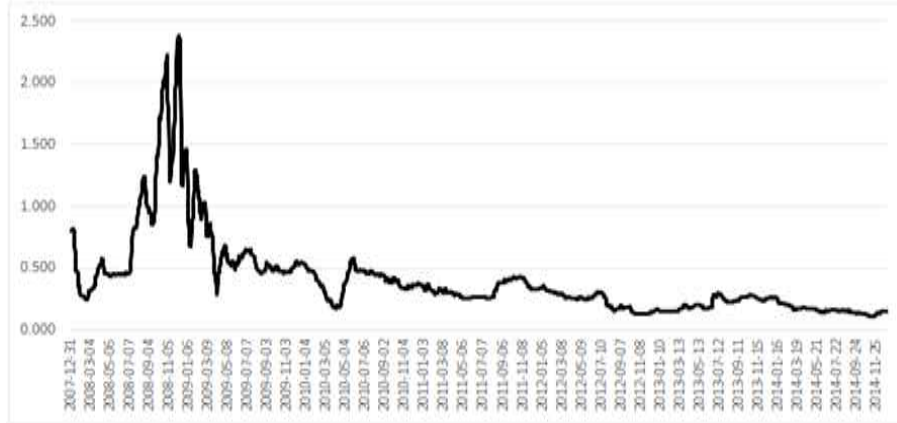
<표 4> 유동성프리미엄 산출 (2015년말)

(단위:%)

만기	1년	2년	3년	5년	7년	10년	15년	20년
산금채 (a)	1.710	1.767	1.810	1.991	2.093	2.217	2.283	2.343
국고채 (b)	1.630	1.650	1.660	1.820	1.990	2.085	2.150	2.175
LP (a-b)	0.08	0.117	0.150	0.171	0.103	0.132	0.133	0.168

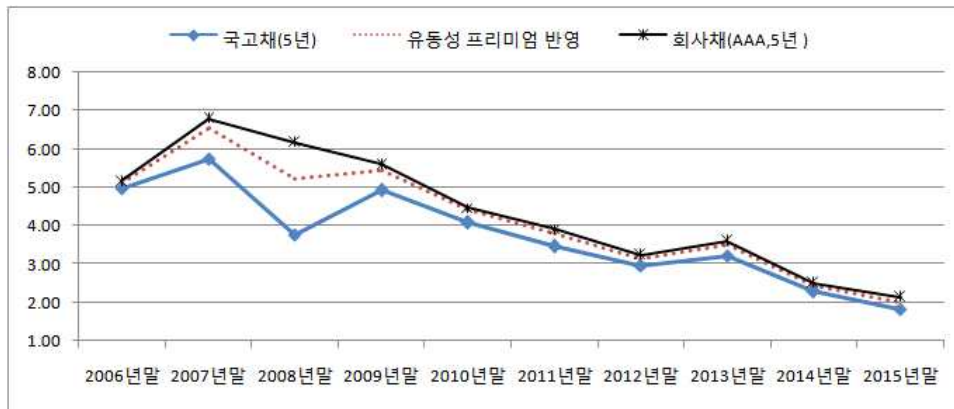
자료 : 금융투자협회

<그림 1>은 만기 5년에 대해 2007년말부터 2014년말까지 유동성 프리미엄을 산출한 것으로 2008년 금융위기시 유동성 프리미엄이 2%이상 상승하였다가 이후 지속적으로 감소하는 추세를 확인할 수 있어 산금채를 이용한 방법이 유효함을 보여주고 있다.



<그림 1> 유동성 프리미엄 추이 (2007년~2014년)

<그림 2>는 최근 10년(2006~2015년)간 만기 5년 기준으로 할인율을 산출한 것으로 금융위기가 발생한 2008년말 무위험수익률인 국고채는 회사채 대비 급격히 하락하였으나 유동성 프리미엄이 반영되어 2009년말과 유사한 수준의 할인율이 산출됨을 알 수 있다.



<그림 2> 연도별 할인율 추이 (만기 5년 기준)



### 3. 할인율 기간구조 산출

상향접근법을 이용한 할인율 산출을 위해 무위험 수익률 곡선에 유동성 프리미엄을 가산하는 방법으로 무위험수익률의 현물 이자율 (spot rate)에 가산하거나 선도이자율(forward rate)에 가산하는 방법이 있다. (CEIOPS, 2010a, 2010b)

상기 방법의 차이는 유동성 프리미엄이 산출 가능한 만기 이후에도 존재하는지, 그리고 측정 가능한지 여부를 가정하는 것과 밀접한 관련이 있다고 볼 수 있다. 유동성 프리미엄을 현물 이자율에 더하는 것은 유동성 프리미엄이 측정 가능한 만기까지만 할인율에 반영되는 반면, 선도 이자율에 더하게 되면 유동성 프리미엄의 영향이 전 만기에 걸쳐 미치게 된다. 본 연구에서는 CEIOPS(2010a)에서 사용한 선도 이자율에 유동성 프리미엄을 가산하는 방법을 적용한다.

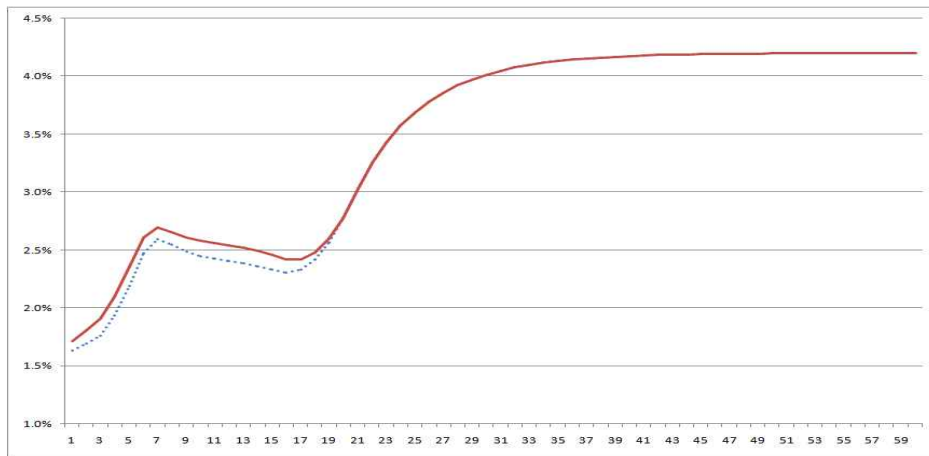
$$\begin{aligned} f_t^L &= f_t + LP_t, \\ LP_t &= F(t) \times LP_{asset}, \\ F(t) &= \begin{cases} 1, & \text{if } t \leq LLP-5, \\ \frac{1}{5}(LLP-t), & \text{if } LLP-5 \leq t \leq LLP, \\ 0, & \text{if } t \geq LLP. \end{cases} \end{aligned}$$

여기서  $f_t^L$ 과  $f_t$ 는 각각 보험부채와 금융시장의 선도금리를 의미하고, LLP는 유동성 프리미엄을 산출한 최대 만기이다. 이를 이용하면, 할인율의 현물이자율 및 할인요인 함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_t^L &= \frac{r_t^L \times t - r_{t-\tau}^L \times (t-\tau)}{\tau}, \\ r_\tau^L &= f_0^L, \\ r_t^L &= \frac{1}{t} (f_t^L \times \tau + r_{t-\tau}^L \times (t-\tau)), \\ P^L(0,t) &= \exp(-r_t^L \times t). \end{aligned}$$

$r_t^L$ 은 만기  $t$ 에 대한 현물 금리를,  $P^L(0,t)$ 는 시점  $t$ 의 현재가치를 의미한다.

2015년말 국고채 선도금리에 유동성 프리미엄을 가산한 결과는 <그림 3>과 같다. 점선으로 표시된 국고채 수익률에 유동성 프리미엄이 더해져서 최종 할인율은 실선과 같이 되며 60년에 4.2%에 수렴함을 알 수 있다.



<그림 3> 할인율 곡선(2015년말)

### III. 시나리오 생성 모형

보험상품은 보험료적립금에 부리하는 이율의 형태에 따라 크게 금리확정형과 금리연동형으로 구분할 수 있다.

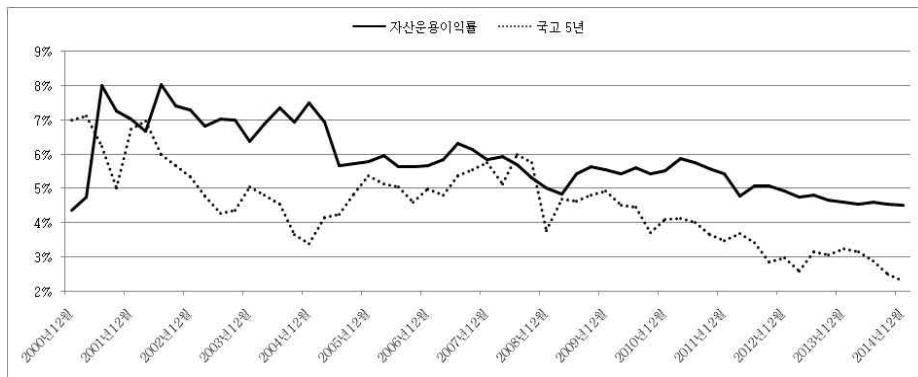
금리 확정형 상품은 보험계약 가입시 확정된 적용이율이 만기까지 고정된 상품으로 보험회사의 자산운용성과에 따라 손실과 이익이 모두 발생하여 별도 모형을 이용한 시나리오 방식이 필요하지 않다.

하지만, 금리 연동형 상품은 보험회사의 운용자산수익률에 따라 보험료적립금 적용 이율이 변동하는 보험으로 보험회사의 자산운용 성과가 높은 경우 일정 마진(공시이율과 최저보증이율 차이)을 계약

자에게 돌려주는 구조이다. 그러나, 자산운용성과가 낮은 경우(운용 자산수익률이 최저보증이율보다 작은 경우) 최저 보증이율에 의해 손실을 부담하게 된다. Solvency II와 IFRS4 2단계에서는 보험계약에 내재된 옵션, 최저지급금 보증 등도 보험부채에 포함되므로 이를 포괄하는 모형 하에서 보험 부채를 평가하는 것이 필요하다.

보험 부채를 평가하기 위해서는 할인율 및 공시이율에 대한 위험 중립측도 시나리오를 생성하는 것이 필요하며 본 연구에서는 이자율과 보험사의 운용자산수익률을 이용하여 시나리오를 생성한다.

<그림4>는 2000년 12월부터 2014년 12월까지 보험회사 자산운용 이익률과 국고채 5년 금리를 비교한 것으로 국고채는 7%에서 시작하여 2.3%까지 하락하는 동안 자산운용이익률은 8%에서 4.5%로 상대적으로 낮은 하락율을 보여 이자율과 다른 변동성을 나타냄을 알 수 있다.



<그림 4> 운용자산수익률과 국고채(만기 5년) 추이 비교

이항석(2013), 권오현·이항석(2013)은 공시이율 시나리오 생성시 이자율 모형만을 적용하였으나, 본 연구는 이자율과 운용자산수익률 간의 상관성이 반영된 모형으로 공시이율 시나리오를 산출하는 것이 기존 연구와의 차이점이다.

이자율은 할인율의 위험중립 시나리오를 생성하는데 사용되며, 보험회사의 운용자산수익률은 공시이율의 위험중립 시나리오를 생성하는데 사용된다.

이번 장에서는 위험중립 시나리오를 생성하는 모형을 소개하고 모형의 상태변수를 이용하여 보험 부채에 적용할 할인율 시나리오를 생성하는 방법을 새로이 제안한다. 이후 운용자산수익률 변동성이 반영된 공시이율의 위험중립 시나리오를 생성하는 방법을 기술한다.

## 1. 위험중립 시나리오 모형

보험부채 평가를 위한 시나리오 산출을 위해 이자율과 보험회사의 운용자산수익률을 모형한다.

이자율 모형은 Brigo and Mercurio (2007)에서 소개된 G2++ 모형을 사용하였다. G2++ 모형은 Hull-White 2 요인(two factor) 모형과 동치인 모형으로써, 순간 단기요율을 두 개의 상관관계가 있는 가우시안 요인(Gaussian factors)과 기결정된(deterministic) 함수의 합으로 모형화한다. G2++ 모형은 1 요인(one factor) 모형과 달리 각 만기별 금리간의 상관관계를 반영한 것으로 시장변동에 좀 더 민감하게 반영하는 특징이 있다. Hull-White 1 요인 모형의 경우, 만기별 현물금리 간의 상관관계가 무조건 1로 고정되어 요인을 통한 각 만기에 가해지는 충격이 모든 만기에 동일하게 가해지는 반면에, G2++ 모형과 같은 다요인(multi-factor) 모형을 사용하면 요인 간의 상관관계를 통해 만기별 현물 금리 간의 상관관계가 좀 더 일반적으로 결정되기 때문이다.

보험회사의 운용자산수익률은 기하 브라운 운동(Geometric Brown motion)을 가정한다. 보험회사의 자산은 채권 외에 주식, 부동산, 대체투자 등 다양한 자산으로 구성되므로 일반적인 모형으로 가정한 것이다.

따라서 제시할 모형은 이자율을 결정하는 요인 2개와 보험사의 운

용자산수익률을 결정하는 요인 1개를 합친 3개의 상태 변수(state variable)를 통해 미래의 불확실성을 모형화하며, 이는 위험중립 측도 하에서 이자율과 위험자산의 혼합 모형(hybrid model)이 된다. 확률미분방정식(stochastic differential equation)을 사용하여 표현된 모형은 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= x(t) + y(t) + \phi(t), \\
 dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), x(0) = 0, \\
 dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_2(t), y(0) = 0, \\
 dX(t) &= (r(t) - \frac{1}{2}\sigma_s^2)dt + \sigma_s dW_3(t), X(0) = 0, \\
 dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt, \\
 dW_1(t)dW_3(t) &= \gamma_{1,3} dt, \\
 dW_2(t)dW_3(t) &= \gamma_{2,3} dt.
 \end{aligned}$$

여기서  $r(t)$ 는  $t$  시점의 순간단기이자율(instantaneous short rate),  $x(t)$ 와  $y(t)$ 는 이자율을 움직이는 두 요인,  $\phi(t)$ 은 이자율 기간구조를 모형과 맞추기 위한 결정 함수,  $X(t)$ 는 보험사가 투자한 자산의 로그 가격이다. 또한,  $a, b, \sigma, \eta, \rho$ 는 G2++모형의 이자율 관련 모수이고,  $\sigma_s$ 는 자산가격의 변동성,  $\gamma_{1,3}$ 는  $x(t)$ 와  $X(t)$  간의 상관관계를 결정하는 모수,  $\gamma_{2,3}$ 는  $y(t)$ 와  $X(t)$  간의 상관관계를 결정하는 모수이다. 편의를 위해 앞으로 상태변수의 벡터를  $Z(t) \equiv (x(t), y(t), X(t))$ 로 표기하기로 한다.

몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 보험부채를 평가하기 위해서는 먼저  $Z(t)$ 의 위험중립측도 하에서의 시나리오를 생성해야 한다. 그 후 보험 부채 할인율과 자산운용 수익률의 시나리오를 생성한 상태변수의 시나리오를 이용해 산출한다.

공시이율이 매월 공시되는 사실을 반영하여 1개월 간격으로 120년간(1,440개월)을 생성한다. 즉, 시나리오를 생성하는 시간 격자(time grid)  $t_n$ 은 다음과 같이 둔다.

$$t_n = n^* \tau, n = 0, 1, \dots, 1440, \quad \tau = 1 \text{개월} = 1/12 \text{년}.$$

$m$ 번째 시나리오에서  $t_n$  시점의 상태변수를  $Z_n^m$ 라고 하면, 상태변수 시나리오는  $m$ 번째 시나리오에서 모든  $n = 0, 1, \dots, 1440$ 에 대해  $Z_n^m$  값을 계산함으로써 산출한다.  $\{N_n^m\}_{n=0, \dots, 1440}$ 을  $m$ 번째 시나리오의 표본 경로를 생성하는데 사용되는 3변량 정규 분포에서 추출된 난수라고 하면, 상태변수 시나리오는 다음 식을 통해 산출할 수 있다.

$$Z_{n+1}^m = A_n^m Z_n^m + B_n^m + \text{chol}(D_n^m) \times N_n^m. \quad (1)$$

식 (1)에 대한 각 항은 다음과 같다.

$$A_n^m = \begin{bmatrix} \exp(-a\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-b\tau) & 0 \\ \frac{1}{a}(1 - \exp(-a\tau)) & \frac{1}{b}(1 - \exp(-b\tau)) & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_n^m = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s) ds - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \tau,$$

$$D_n^m = \text{chol} \left( \begin{bmatrix} \nu'_{11} & \nu'_{12} & \nu'_{13} \\ \nu'_{21} & \nu'_{22} & \nu'_{23} \\ \nu'_{31} & \nu'_{32} & \nu'_{33} \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{aligned}
\nu'_{11} &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a\tau)), \\
\nu'_{22} &= \frac{\eta^2}{2b}(1 - \exp(-2b\tau)), \\
\nu'_{33} &= \frac{\eta^2}{2b^3}(-3 - \exp(-2b\tau) + 4\exp(-b\tau)) \\
&\quad - \frac{2\sigma\eta\rho}{ab^2}(1 - \exp(-b\tau)) - \frac{2\sigma\eta\rho}{a^2b}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{2\sigma\eta\rho}{ab(a+b)}(1 - \exp(-(a+b)\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3}(-3 - \exp(-2a\tau) + 4\exp(-a\tau)) \\
&\quad - \frac{2\eta\sigma s\gamma_{2,3}}{b^2}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&\quad - \frac{2\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a^2}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2\tau}{a^2} + \frac{\eta^2\tau}{b^2} + \sigma_s^2\tau + \frac{2\sigma\eta\rho\tau}{ab} + \frac{2\gamma_{1,3}\sigma\sigma s\tau}{a} + \frac{2\gamma_{2,3}\eta\sigma s\tau}{b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu'_{12} = \nu'_{21} &= \frac{\sigma\eta\rho}{(a+b)}(1 - \exp(-(a+b)\tau)), \\
\nu'_{13} = \nu'_{31} &= \frac{\sigma\eta\rho}{a(a+b)}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma\eta\rho}{b(a+b)}(-\exp(-a\tau) + \exp(-(a+b)\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a(a+b)}(1 + \exp(-2a\tau) - 2\exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{b\sigma^2}{2a^2(a+b)}(1 + \exp(-2a\tau) - 2\exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a+b}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{b\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a(a+b)}(1 - \exp(-a\tau)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu'_{23} = \nu'_{32} &= \frac{\sigma\eta\rho}{b(a+b)}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{\sigma\eta\rho}{a(a+b)}(-\exp(-b\tau) + \exp(-(a+b)\tau)) \\
&+ \frac{\eta^2}{2b(a+b)}(1 + \exp(-2b\tau) - 2\exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{a\eta^2}{2b^2(a+b)}(1 + \exp(-2b\tau) - 2\exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{\eta\sigma\hat{s}^{2,3}}{a+b}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{a\eta\sigma\hat{s}^{2,3}}{b(a+b)}(1 - \exp(-b\tau)), \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds &= \log\left(\frac{P^M(0,t)}{P^M(0,T)}\right) + \frac{1}{2}[V(0,T) - V(0,t)], \\
V(t,T) &= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[T-t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right] \\
&+ \frac{\eta^2}{b^2}\left[T-t + \frac{2}{b}e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b}e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b}\right] \\
&+ 2\rho\frac{\sigma\eta}{ab}\left[T-t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b}\right].
\end{aligned}$$

$P^M(0, T)$ 은 평가 시점에서 관찰한 만기  $T$ 를 갖는 무이표 채권 가격이며 각각의 식에 대한 자세한 유도과정은 부록으로 넘긴다.

## 2. 할인율 시나리오 산출 모형

만기  $T$  시점의 상태변수가  $Z_T$ 일 때,  $g(Z_T)$ 를 지급하는 금융상품의 현재 시점가격  $C$ 는 무위험 차익거래 논리를 활용하면 다음과 같은 위험중립측도 하에서의 기대값으로 표현될 수 있다.



$$C = E^Q[M(T)g(Z_T)]. \quad (2)$$

여기에서  $M(T) \equiv e^{(-\int_0^T r_s ds)}$ 이며, 미래의 현금흐름을 현재로 할인하고 이자율에 따라 변화하는 확률적 할인 요인(stochastic discount factor)으로 앞서 정의한 순간 단기요율  $r_s$ 으로 계산할 수 있다.

특히, 만기  $T$ 를 갖는 무이표 채권의 가격, 즉 만기  $T$ 에 1원을 지급하는 무위험 채권의 가격  $P^M(0, T)$ 는 시장에서 관찰할 수 있어, 식 (12)에서  $g(x) \equiv 1$ 를 대입하면 다음을 얻는다.

$$P^M(0, T) = E^Q[M(T)].$$

마찬가지로 우리는 보험 부채를 현재가치로 할인할 수 있는 확률적 할인요인을 생각할 수 있다. 금융 상품을 할인할 수 있는 확률적 할인요인과 마찬가지로 보험 부채를 할인할 수 있는 확률적 할인요인을  $M^L(T)$ 로 표기하면, 만기  $T$  시점의 상태변수가  $Z_T$ 일 때  $g(Z_T)$ 의 현금흐름을 발생시키는 보험부채의 현재가치  $C^L$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C^L = E^Q[M^L(T)g(Z_T)]. \quad (3)$$

그리고 앞서 상향접근법으로 구한 보험 부채의 할인율을 이용하면 주어진 만기  $T$ 시점에 1의 현금흐름을 발생시키는 보험부채의 현재가치는  $P^L(0, T)$ 이고 이는 관찰할 수 있는 값이 된다. 식 (2)와 마찬가지로 식 (3)에서  $g(x) \equiv 1$ 를 대입하면  $P^L(0, T)$ 를 다음과 같이 표현

할 수 있다.

$$P^L(0, T) = E^Q[M^L(T)]. \quad (4)$$

여기서,  $M^L(T)$ 을 보험부채에 적용할 수 있는 순간 단기요율의 확률과정  $r_s^L$ 이 존재하여 다음과 같이 계산할 수 있다고 가정하자.

$$M^L(T) = e^{(-\int_0^T r_s^L ds)}.$$

즉,  $r_s^L$ 는 순간 단기요율  $r_s$ 이 금융상품을 할인할 수 있는 확률적 할인요인을 계산하는 것과 마찬가지로 보험부채를 할인할 수 있는 확률적 할인 요인을 계산할 수 있는 보험부채의 순간단기요율이라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 이를 “보험 부채의 할인율 프로세스”로 정의하고, 시점  $s$ 의 보험 부채의 할인율 프로세스 값을  $r_s^L$ 로 표기 하도록 한다. 보험 부채의 할인율 시나리오는 보험 부채의 할인율 프로세스의 위험중립 시나리오를 일컫는다.

몬테카를로 시뮬레이션을 사용해 보험 부채를 평가하기 위해서는 위에서 생성한 상태변수의 위험중립 시나리오를 생성하는 동시에 보험 부채의 할인율 프로세스의 시나리오 또한 생성할 필요가 있다. 이렇게 생성한 할인율 프로세스는 보험 부채의 현금흐름을 할인하는데 사용됨으로써 식 (3)을 이용해 보험부채를 평가하는데 사용되게 된다.

본 연구에서 보험부채의 할인율은 무위험 수익률 곡선의 선도 이자율에 유동성 프리미엄을 가산하여 산출하였다. 따라서 보험부채의 할인율 프로세스  $r_s^L$  또한  $r_s$ 에 유동성 프리미엄의 역할을 하는 일정 조정치를 가산하여 구할 수 있다고 생각할 수 있다. 또한, 이 일정

조정치는 보험부채의 할인율 프로세스를 평가 시점에서 관찰할 수 있는 주어진 만기  $T$ 에 대한 보험 부채의 할인 요인  $P^L(0, T)$ 을 잘 적합하게 정해져야 한다. 따라서 본 연구에서는 보험부채의 할인율 프로세스가 금융상품의 순간단기요율에 기결정된 함수를 가산하여 산출된다고 가정한다.

$$r_s^L \equiv r_s + c_s. \quad (5)$$

이 때,  $c_s$ 는 식 (4)을 만족하도록 정해진다. 식 (5)을 식 (4)에 대입하면

$$\begin{aligned} P^L(0, T) &= E^Q[M^L(T)] \\ &= E^Q[e^{(-\int_0^T r_s^L ds)}] \\ &= E^Q[e^{(-\int_0^T r_s + c_s ds)}] \\ &= E^Q[e^{(-\int_0^T r_s ds)}] \times e^{(-\int_0^T c_s ds)} \\ &= P^M(0, T) \times e^{(-\int_0^T c_s ds)} \end{aligned}$$

따라서 다음 관계식이 성립한다.

$$\int_0^T c_s ds = \log\left(\frac{P^M(0, T)}{P^L(0, T)}\right). \quad (6)$$

식 (6)은 모든 만기  $T$ 에 대해 성립하므로, 양변을  $T$ 로 미분하면

$$c_T = \frac{d}{dT} \log\left(\frac{P^L(0, T)}{P^M(0, T)}\right). \quad (7)$$

따라서 식 (7)을 통해 모든 만기  $T$ 에 대해  $c_T$ 를 구할 수 있고, 보험 부채의 할인율 프로세스는 모든 만기에 대한 보험 부채의 할인율을 적합하게 정의된다. 보험부채의 할인율의 시나리오는 식 (7)을 통해 구한  $c_T$ 와 앞서 생성한 상태변수의 위험중립 시나리오로부터 산출할 수 있다.

### 3. 운용자산수익률 및 공시이율 시나리오 모형

금리연동형 상품을 평가하기 위해서는 보험료 적립금을 부리하는 위한 공시이율의 위험중립 시나리오를 구하여야 한다. 공시이율은 보험사의 운용자산수익률의 일정 비율<sup>13)</sup>으로써 정해지므로 공시이율의 위험중립 시나리오는 운용자산수익률의 위험중립 시나리오를 먼저 구한 후, 일정 비율을 반영하여 산출할 수 있다.

운용자산수익률 시나리오는 보험사가 투자한 자산의 로그가격인  $X(t)$ 를 관찰하여 산출할 수 있다. 시점  $t$ 의 자산 가격을  $S(t)$ 라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$S(t) = e^{X(t)}.$$

이때, 시점  $t$ 와 시점  $t+dt$  사이의 운용자산수익률  $R_{t,t+dt}$ <sup>14)</sup>은 다음과 같다.

13) 감독규정에서 공시이율은 공시기준이율의 80~120%에서 결정되나, 공시기준이율이 운용자산수익률에 기반하여 산출되므로 운용자산이익률의 일정비율이라고 기술하였다.

14) 여기서  $R_{t,t+dt}$ 은 이자율과 같은 수준의 값, 즉 1.05가 아닌 0.05같은 값이다.

$$\begin{aligned}
R_{t,t+dt} &= \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} \\
&= \exp(X_{t+dt} - X_t) - 1.
\end{aligned}$$

공시이율은 운용자산수익률의 일정 비율로 계산되며, 이 비율을  $p$ 라고 하면, 시점  $t$ 와 시점  $t+dt$  사이의 공시이율  $D_{t,t+dt}$ 은 식 (8)로 계산할 수 있다.

$$D_{t,t+dt} = p \times R_{t,t+dt}. \quad (8)$$

#### 4. 모수 추정

##### (1) 이자율 모형 모수 캘리브레이션

추정해야되는 이자율 모수는  $a, b, \sigma, \eta, \rho$ 이며 각각은 시장에서 거래되는 스왑션 가격과 G2++모형에서 산출된 스왑션 가격의 오차가 최소화되도록 추정한 값<sup>15)</sup>으로 분석에 사용된 이자율 모수는 <표 5>와 같다.

---

15) 자세한 산출과정은 Brigo and Mercurio(2007)와 태현욱 등(2015)을 참고한다.

<표 5> 연도별 이자율 모수

연도	$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
2006년말	0.180519	0.111904	0.032136	0.030704	-0.98
2007년말	0.058769	1E-05	0.015907	0.009915	-0.8432
2008년말	0.601411	0.00001	0.008561	0.00678	0.98
2009년말	0.144566	0.108169	0.061462	0.059815	-0.98
2010년말	1.008718	0.07374	0.020109	0.011368	-0.82754
2011년말	0.12454	0.2028	0.04229	0.046344	-0.98
2012년말	2.066324	0.037465	0.032715	0.006535	-0.85749
2013년말	1.312348	0.031568	0.019758	0.007314	-0.90494
2014년말	0.264505	0.124768	0.032041	0.026498	-0.98
2015년말	1.004789	0.047237	0.015725	0.006929	-0.83328

(2) 보험회사 자산 가격의 변동성 추정

보험회사 자산가격의 변동성  $\sigma_s$ 은 보험회사 운용자산이익률의 과거 데이터<sup>16)</sup>를 이용한 단순 변동성(simple historical volatility)를 구함으로써 추정하였다. 추정 값은  $\sigma_s = 0.482\%$ 로 기간에 상관없이 일정한 값을 이용하였다.

본 연구에서는 대표성을 위해 전체 보험회사 운용자산이익률을 이용하였으나 실제 보험회사가 추정할 때는 자사의 운용자산이익률을 이용하는 것이 적절할 것이다. 예를 들어 특정 보험회사가 채권에 업계 평균 이상 투자할 경우, 자산 변동성  $\sigma_s$ 이 상대적으로 낮게 추정되는 반면에 주식이나 부동산, 원자재와 같이 비교적 채권보다 변동성이 큰 상품에 더 많이 투자를 한다면 자산 변동성  $\sigma_s$ 가 더 높은 값이 추정되어 보험부채 평가시 개별 보험회사의 투자전략이 반영된 운용자산이익률이 산출될 것이다.

16) 금융감독원 금융통계시스템에 공시된 자료(2000년 12월~2015년 6월)를 이용하였다.

(3) 이자율의 각 요인과 보험회사 자산가격 간의 상관관계

이자율의 각 요인과 보험회사 자산가격 간의 상관관계  $\gamma_{1,3}, \gamma_{2,3}$ 는 보험회사 자산가격과 순간단기요율간의 상관관계를 관찰하여 구할 수 있다. 우선, 모형의 위험 요소는  $W_t = (W_1, W_2, W_3)^T$ 이며, 이들의 상관관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} d[W_1 \ W_2 \ W_3] = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \gamma_{1,3} \\ \cdot & 1 & \gamma_{2,3} \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

여기서  $\gamma_{1,3}, \gamma_{2,3}$ 는 각 이자율 요인과 보험회사 자산가격 간의 상관관계를 결정하는 모수로써, 원래는 따로따로 관찰해야 하나, 이자율 요인 각각을 실제로 관찰하기는 어려운 일이므로 다음 가정을 추가한다:17)18)

$$\begin{aligned} \gamma_{1,3} &= \gamma, \\ \gamma_{2,3} &= \text{sign}(\rho)\gamma, \\ \text{sign}(\rho) &= \begin{cases} 1 & \text{if } \rho > 0, \\ -1 & \text{if } \rho < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

이때, 순간단기요율  $r_t$ 의 증분과 보험회사 자산의 로그 가격  $X_t$ 의 증분간의 상관관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

---

17) 이와 비슷한 가정은 Brigo and Mercurio (2007)에서 다요인 이자율 모형을 간의 상관관계를 모형화하거나, 다요인 이자율모형과 환율 간의 상관관계를 반영하기 위해 소개한 방법이다.

18) Brigo and Mercurio (2007)에서 소개한 방법은  $\text{sign}(\rho)$ 가 들어가지 않는다. 여기서는 보다 넓은 모수의 범위 하에서 공분산 행렬이 양정행렬(positive definite matrix)이 되는 것을 보장하기 위해 이를 도입하였다. 양정행렬이 보장되는 것은 공분산행렬의 양정행렬 조건으로부터 직접적으로 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\text{Corr}\{dr, dX\} &= \text{Corr}(dx + dy, dX) \\
&= \frac{\text{Cov}(dx + dy, dX)}{\text{Std}(dx + dy)\text{Std}(dX)} \\
&= \frac{\sigma\sigma_S\gamma_{1,3} + \eta\sigma_S\gamma_{2,3}}{\sqrt{\sigma^2 + \eta^2 + 2\rho\sigma\eta}\sqrt{\sigma_S^2}} \\
&= \frac{\sigma\gamma_{1,3} + \eta\gamma_{2,3}}{\sqrt{\sigma^2 + \eta^2 + 2\rho\sigma\eta}} \\
&= \gamma\left(\frac{\sigma + \eta \times \text{sign}(\rho)}{\sqrt{\sigma^2 + \eta^2 + 2\rho\sigma\eta}}\right).
\end{aligned}$$

따라서  $\gamma$ 는 다음 공식을 사용해 구할 수 있다.

$$\gamma = \text{Corr}(dr, dX) \frac{\sqrt{\sigma^2 + \eta^2 + 2\rho\sigma\eta}}{\sigma + \eta \times \text{sign}(\rho)}. \quad (10)$$

여기서  $a, b, \sigma, \eta, \rho$ 는 캘리브레이션으로 구해서 알고 있으므로, 이제  $dr$ 과  $dX$ 의 상관관계  $\text{Corr}(dr, dX)$ 만 추정하면 식 (10)을 사용하여  $\gamma$ 를 구할 수 있다. 그 다음, 식 (10)를 사용하여  $\gamma_{1,3}, \gamma_{2,3}$ 를 계산하면 된다.

상관관계  $\text{Corr}(dr, dX)$ 는 역시  $\sigma_S$ 를 추정할 때 사용한 운용자산 수익률과 순간 단기요율의 근사치로써의 CD 91일을 이용해 단순 상관관계를 구하였으며, 산출 결과는  $\text{Corr}(dr, dX) = 0.1321$ 로 양의 상관관계가 있음을 알 수 있다.



## IV. 보험부채 평가

### 1. 분석대상 보험상품

보험부채에 할인율 적용시 영향을 분석하기 위해 저축성 보험상품과 보장성 보험상품을 각각 한 종류씩 설정하였으며 저축성은 금리확정형 연금보험을, 보장성은 금리연동형 종신보험을 분석대상 보험상품으로 하였다.

우리나라 보험상품의 예정이율 분포<sup>19)</sup>를 고려하여 금리확정형은 7.5%를, 금리연동형은 3.5%를 예정이율로 적용한다. 연동형은 예정이율과 최저보증이율이 같다고 가정한다.

보험상품의 보장내용 및 속성은 <표 6> 및 <표 7>와 같다.

<표 6> 연금보험 상품 가정

계약속성	- 성별 : 남자, 나이 : 40세 - 제1보험기간 : 20년, 10년납, 연금연액 : 241만원
보장내용	제1보험기간까지 생존시 종신연금 지급
예정이율	금리확정형 7.5%
예정위험률	제3회 경험생명표
예정사업비율	- 신계약비 : 기본보험료의 635% - 유지비 · 납입중 : min(4,500원, 기본보험료 1.0%) + 기본보험료 1.5% · 납입후 : 구좌당 월 2000원 - 수급비 : 기본보험료의 2.5%
월보험료	10만원

19) 금융감독원(2015.4.1)에 의하면 14년 12월말 기준 생명보험사의 보험료 적립금 444.5조 원중에서 금리확정형 196.9조원 중 예정이율 7%대가 78.9조, 금리연동형은 247.6조원 중 예정이율 4% 미만인 205.7조원으로 가장 높은 비중을 나타냄.

<표 7> 종신보험 상품가정

계약 속성	- 성별 : 남자, 가입연령 : 40세 - 보험기간 : 종신, 20년납 - 가입금액 : 1억원
예정이율	금리연동형 3.5%
예정위험률	제7회 경험생명표
예정사업비율	- 신계약비 · 20년납의 초년도 연납 순보험료의 100%, · 초년도 보험가입금액 10/1,000 - 유지비 · 납입중 : 영업보험료의 7% + 가입금액 0.5% · 납입후 : 가입금액 0.3% - 수금비 : 영업보험료의 2%
월보험료	18.9만원

한편, 보험부채의 현금흐름 평가시 적용되는 해지율은 오창수 등 (2013)에서 사용한 해지율을 <표 8>과 같이 동일하게 가정하였다.

<표 8> 경과년도별 해지율

(단위:%)

경과연도	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10+
종신	12	18	14	12	10	9	9	9	7	4
연금	10	20	17	15	12	10	9	9	7	3

보험부채 공정가치 평가시 리스크마진 등을 고려해야 하나 본 연구는 할인을 적용에 따른 현금흐름 변동에 중점을 두어 분석한다.

## 2. 평가 결과

(1) 상품별, 경과기간별 보험부채

앞서 3장에서 산출한 할인율을 분석대상 보험상품에 적용한 결과를 <표 9>에 정리하였다. 연금과 종신보험 상품 모두 현행 발행년도 방식 책임준비금보다 큰 것으로 나타났는데 이는 예정이율보다 낮은 할인율을 적용하였기 때문이다. 종신보험이 연금보험보다 예정이율이 낮아 증가율은 연금보험에 비해 낮다. 또한, 경과기간이 증가할수록 할인율 적용기간 축소로 인해 증가율은 감소한다.

<표 9> 상품별, 경과기간별 준비금 평가금액

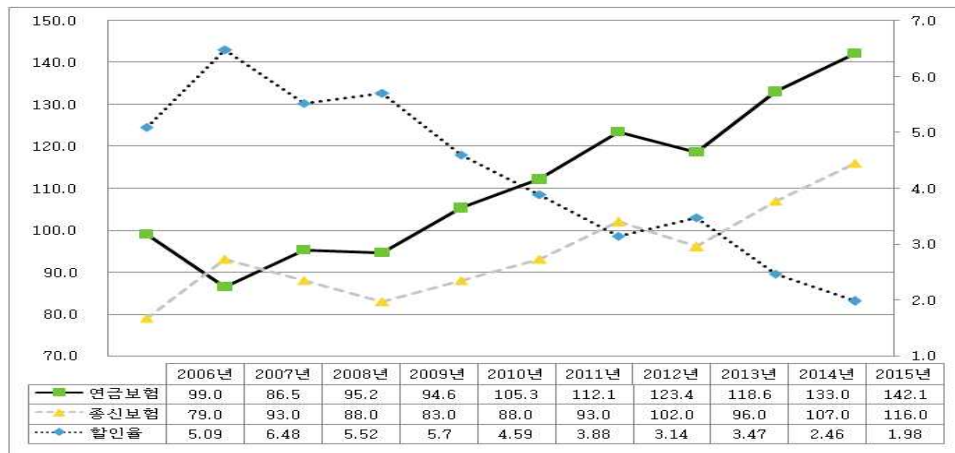
구 분 (백만원)		현행 발행년도방식 책임준비금 (a)	공정가치 할인율 적용 보험부채 (b)	현행 발행년도방식 책임준비금 대비 비율 (b/a)
상품	경과기간			
연금보험	10년	15.1	25.3	168%
	15년	21.1	30.0	142%
	20년	29.6	34.7	117%
종신보험	10년	20.5	23.9	116%
	15년	33.2	38.6	116%
	20년	48.0	55.3	115%

(2) 할인율 수준 변동

예정이율 7.5%인 연금보험상품이 90년대 후반에서 2000년 초반에 많이 판매가 된 것으로 알려져 있어 경과기간 15년에 대해 2006년부터 2015년까지의 최근 10년간의 실제 할인율을 적용하여 평가하였다.

2015년말 기준 현행 발행년도방식 준비금을 100으로 하여 연도별로 산출한 할인율을 적용하여 비교하였다.

연금보험은 금리확정형으로 할인율 수준과 보험부채의 증감이 대칭적으로 움직여 할인율에 따라 보험부채가 민감하게 반응함을 알 수 있다. 종신보험은 금리연동형으로 할인율 수준이 높은 2006~9년은 연금보험과 상이한 패턴을 보이나 이후 이자율이 지속적으로 하락한 2010년이후는 연금보험과 동일한 패턴을 보임을 알 수 있다.



<그림 5> 최근 10년간 할인율 적용에 따른 보험부채 변동

### (3) 최저보증이율 수준 변동 (금리연동형 종신보험)

금리연동형 종신보험상품의 최저보증이율 수준에 따른 효과를 분석하기 위해 경과기간 15년에 대해 예정이율(3.5%)은 동일하게 하고 최저보증이율을 0.5%p씩 감소시켰다.

최저보증이율 감소에 따라 준비금이 감소하므로 보험사의 재무건전성을 위해서는 보증수준을 고려하여 상품을 개발하는 것이 필요함을 알 수 있다.

<표 10> 최저보증이율 수준에 따른 보험부채 변화

(단위:백만원)

최저보증이율	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%	3.5%	현행
책임준비금 (현행 대비 비율)	28.8 (87%)	30.4 (92%)	32.5 (98%)	35.1 (106%)	38.6 (116%)	33.2 (·)

## V. 결론

본 연구는 IFRS4 2단계 시행 등 보험부채 공정가치 평가시 우리나라 상황에서 적용가능한 할인율 산출방법을 제시하고, 이렇게 산출된 할인율을 보험상품에 적용하여 보험부채 평가액에 미치는 영향을 분석한 것이다.

Solvency II에서 제시한 이자율스왑과 달리 국내 환경에는 무위험 수익율로 국고채를 사용하는 것이 적절하다고 판단하였으며 국고채에 대한 관찰가능한 최대 기간은 20년으로 하였다. 30년은 거래량 및 발행기간을 고려하여 신뢰성이 낮다고 보았으나 일정시간 경과 후 관찰기간에 포함여부를 다시 검토하는 것이 필요할 것이다.

관찰되지 않는 기간에 대한 추정은 기존 연구에서 제안된 Smith-wilson방법을 사용하며 Solvency II에서 제시된 방법론을 이용하여 장기선도금리는 4.2%, 수렴속도는 60년에 최초 수렴하도록 무위험수익률 곡선을 추정하였다.

한편, 유동성 프리미엄은 기존 연구에서 제시한 신용부도스왑방법이 아닌 산금채를 이용한 커버드 본드 방법을 제안하였다.

국내의 신용부도스왑은 만기 3년이내로 다른 만기에 적용하지 못하는 점을 보완하여 만기별로 다른 유동성 프리미엄을 산출가능함을 보여주었고 과거 데이터 추이를 관찰하여 2008년 금융위기사 유동성 프리미엄이 높게 산출되는 것을 보아 방법의 유효성을 실증적

으로 분석하였다.

또한, 할인율 기간구조 산출 방안뿐만 아니라 시나리오 산출 모형을 제시하였다. 기존 연구는 공시이율 시나리오 산출시 이자율 모형만 적용하였으나 본 연구는 이자율뿐만 아니라 보험회사의 운용자산이익률 변동성도 반영한 혼합모형을 제시하여 실제 보험회사의 투자전략이 반영된 공시이율 시나리오 산출이 가능하다는 점에서 차별성있다. 뿐만아니라, 이자율은 각 만기별 상관관계를 고려할 수 있는 G2++ 모형을 적용하여 시장상황을 좀 더 잘 반영한 것도 차이점이라고 할 수 있다.

최근 10년(2006~2015년)의 시장데이터를 이용하여 할인율을 산출하고 보험부채에 대한 영향을 분석한 결과 보험부채 평가액이 시장상황 변화에 상당히 민감한 것으로 나타났다. 특히, 금리연동형 종신보험은 최저보증이율 수준에 따라 부채 평가액이 변동됨을 알 수 있어 보증수준을 고려한 상품개발이 중요함을 시사한다.

본 연구는 국내 시장상황에 적합한 할인율 기간구조 및 시나리오 모형을 구체적으로 제시하고 실증적으로 분석하였다는 것에 의미를 둘 수 있다.

다만, 할인율 산출에 초점을 두어 IFRS4 2단계 등의 보험부채 요소인 리스크조정, 계약서비스마진 등이 고려하지 않았다는 점에서 한계를 갖는다. 향후 보험부채 구성요소를 반영한 종합적인 분석이 필요할 것이다.

하지만, 최근 언론 기사에서도 보았듯이 시장상황이 반영된 부채 평가는 보험회사 수익성 및 재무건전성의 변동성을 확대시키는 요인이 된다.

이에 따라 본 연구는 보험회사의 선결과제를 제시하면서 마무리하고자한다.

첫째, ALM 및 자산 수익률을 고려한 자산운용전략 수립이 필요하다. 부채가 시장상황에 민감하게 반응하므로 자산과 매칭을 통해 자본의 변동성을 최소화하는 것이 필요하다.

둘째, 재무적 영향 최소화를 위한 자본 확충을 적극 검토해야한다. 자본확충 방안으로는 전통적인 채권 투자 외에 주식, 부동산, 해외 투자 등 다양한 자산운용전략을 수립하여 자산수익률을 증가시키는 방안이 있을 것이며, 또한 주주배당을 유보하여 자본을 증가시킬 수 있을 것이다.

마지막으로 할인율 산출을 위한 전문인력확보가 중요하다. 전통적인 보험부채 평가와 달리 시장상황을 반영하여 평가하므로 금융공학, 수학, 통계학에 대한 전문적인 지식과 자본시장에 대한 충분한 이해가 있어야 제대로 된 부채평가를 할 수 있다. 이를 위해서는 보험회사가 자체적으로 할인율 기간구조 및 시나리오를 산출해야되나 현재는 산출가능한 회사가 많지 않은 것으로 알려져 있다. 은행이나 증권은 퀀트(quant)라 불리는 전문인력이 있어 이자율이나 주가에 대한 모델링을 하나 국내 보험사는 극히 일부 대형사를 제외하고는 금융공학적 모델링을 할 수 있는 인력이 없다. 보험사의 할인율 산출 전문인력은 자본시장뿐만 아니라 보험부채 평가를 모두 이해할 수 있어야 하므로 이를 위한 인력확보 및 양성 계획이 중요하다.

## <참고문헌>

- 권오현·이항석, “금리연동형 상품의 금리민감도”, 보험학회지, 제95집(2013): 61-85
- 권용재, “변액연금 최저연금적립금보증 요구자본 계산시 확률론적 시나리오 방식 적용 연구”, 보험학회지, 제87집(2010), 1-33
- 금융감독원, “2014년 보험회사 투자부문 금리차 및 손익현황”, 보도자료, 2015.4.1
- 금융감독원, “재무건전성 규제환경변화에 대응한 국내 보험회사 재무건전성 감독방향”, 제8회 국제보험산업 심포지엄, 2015.10.21
- 금융감독원, “보험계약 국제회계기준(IFRS4) 2단계 도입과 대응”, 한국회계학회·금융감독원, 2015.12.21.
- 노건엽, “변액보험의 보증옵션 가치평가와 실무처리방안”, 보험학회지, 제99집(2014):35-65
- 노건엽·박경국, “IFRS4 2단계 하에서의 보험부채 평가목적 할인율에 관한 연구”, 리스크관리연구, 제25권 제3호(2014): 73-111.
- 엄영호·김계홍, “변액연금의 가치산정 및 리스크 분석”, 보험학회지, 제84집(2009):105-137
- 오창수, “생명보험회사의 보험료결손에 관한 연구”, 보험학회지, 제72집(2005): 3-31
- 오창수·유인현·박규서·강원재, “IFRS4 기준하의 보험부채 평가에 관한 연구”, 리스크관리연구, 제24권 제2호(2013) : 99-122.
- 오창수·이윤구, “금리연동형 보장성 보험의 최저보증이율 산출에 관한 연구”, 계리학연구, 제2권 제2호 (2010): 27-50
- 윤영준, “국제보험회계기준 도입에 따른 책임준비금 평가에 관한 연구 - 생명보험회사를 중심으로”, 계리학연구, 제3권 제1호(2011): 29-58.
- 이항석, “이자율 보증옵션이 내재된 생명보험의 이차익 분석”, 한국데이터정보과학회지, 제24권 제4호(2013) : 737-753.
- 주호찬·노준희·이항석, “보험에서의 유동성 프리미엄 기간구조 추정”, 리스크관리연구, 제26권 제1호 (2015): 93-123
- 조재린·김해식, “일반손해보험의 부채 시가평가와 보험위험계수 산출에 관한



- 연구”, 리스크관리연구, 제26권 제1호(2015): 125-151
- 태현욱 · 장봉규 · 임상규, “금리기간구조 변화와 한국 금리연계 파생결합상품 투자자 보호에 대한 소고”, 한국증권학회지, 제44권 제5호(2015):947-995
- Brigo, Damiano and Fabio Mercurio, “Interest Rate models–Theory and practice: with smile, inflation and credit”, 2007
- CEIOPS, “Task Force Report on the Liquidity Report”, 2010a.
- CEIOPS, “QIS 5 Risk-free interest rates–Extrapolation method”, 2010b.
- EIOPA, “Technical Findings on the Long-Term Guarantee Assessment”, 2013.6.
- EIOPA, “Technical Specification for the Preparatory Phase (Part II)”, 2014.4
- EIOPA, “Technical documentation of the methodology to derive EIOPA’s risk-free interest rate term structures”, 2015.12
- EIOPA, “SOLVENCY II IS GOING LIVE”, 2016.1.4
- Grzelak, L.A., Oosterlee, C.W, and Weeren, S.V. , “Efficient Option Pricing with Multi-factor Equity-Interest Rate Hybrid Models.”, Reports of the Department of Applied Mathematical Analysis, Delft University of Technology, 2009.7
- Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven, “Brownian Motion and Stochastic Calculus”, Springer, 2012
- IAA, “Discount Rates in Financial Reporting”, 2013.
- IASB, “Revised Insurance Contracts Exposure Draft”, 2013.7
- IASB, “Insurance Contracts, Basis for Conclusions, Exposure Draft”, 2013.7
- IASB, “Determining discount rates when there is lack of observable data”, Staff paper, 2014.6

금융감독원 [www.fss.or.kr](http://www.fss.or.kr)

금융투자협회 [www.kofiabond.or.kr](http://www.kofiabond.or.kr)

매일경제, “위기의 보험산업”, 2015년 9월 22일

머니투데이, “보험사 자본 증발위기, 컨트롤 타워가 없다”, 2016년 1월 7일

<붙임> 시나리오 산출 식 유도과정

상태변수 벡터  $Z(t) \equiv [x(t), y(t), X(t)]^T$ 와, 3차원 표준 브라운 운동을  $Y(t) \equiv [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)]^T$  라고 하면,<sup>20)</sup> 상태변수의 움직임은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$dZ(t) = [C_1 + C_2 Z(t)]dt + C_3 dY_t,$$

각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_1(t) &= [0, 0, \phi(t) - \frac{1}{2}\sigma_S^2]^T, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_3 C_3^T &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma\eta\rho & \sigma\sigma_S\gamma \\ \cdot & \eta^2 & \eta\sigma_S\gamma \\ \cdot & \cdot & \sigma_S^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$C_3$ 은 세 번째 행렬의 Cholesky decomposition(해당 관계식을 만족하는 어떤  $3 \times 3$  행렬이라도 상관없음)이라고 한다.

이러한 유형의 확률미분방정식은 선형 방정식(linear equation) 형태로써,  $Z(t)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>21)</sup>.

$$Z(t) = \Phi(t)[Z(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)C_1(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)C_3 dW_s], \quad (11)$$

20) 이 브라운 운동은  $W(t) = [W_1(t), W_2(t), W_3(t)]^T$ 와 다름에 유의한다.  $W(t)$ 는 각 요소(component)의 상관관계(correlation)가 존재하며,  $Y(t)$ 는 각 요소가 독립적인 브라운 운동이다.

21) Karatzas and Shreve (2012)중 5단원의 결과를 이용하였다.

여기서  $\Phi(t)$ 는 다음 상미분방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= C_2\Phi(t), \quad \Phi(0) = 3 \times 3 \text{ 단위 행렬}, \\ \dot{\Phi} &= \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (12)$$

$C_2$ 가 상수이므로, 식(12)의 해는 행렬 지수함수(matrix exponential)를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi(t) = \exp(C_2 t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(C_2 t)^i}{i!} \quad (13)$$

식 (13)의 오른쪽 관계식은 행렬 지수함수의 정의를 나타낸다. 대각화를 이용하면 식 (13)은 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(-at) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-bt) & 0 \\ \frac{1}{a}(1 - \exp(-at)) & \frac{1}{b}(1 - \exp(-bt)) & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하면,  $Z(t)$ 의 움직임이 완전히 표현된다.

식 (11)의 변수  $t$ 에  $t_n$ 을 대입하고, 양변에  $\Phi^{-1}(t_n)$ 을 왼쪽에 곱하면 다음을 얻는다.

$$\Phi^{-1}(t_n)Z_n^m = \left[ \int_0^{t_n} \Phi^{-1}(s)C_1(s)ds + \int_0^{t_n} \Phi^{-1}(s)C_3dW_s \right].$$

따라서 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}(t_{n+1})Z_{n+1}^m - \Phi^{-1}(t_n)Z_n^m \\ &= \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s)C_1(s)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s)C_3dW_s \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 우변은 삼변량 정규분포(3-variate normal distribution)를 따르며, 평균  $\mu_n^m$ 과 분산  $\nu_n^m$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_n^m &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s)C_1(s)ds \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds - \frac{1}{2}\sigma_S^2\tau \end{bmatrix}, \\ \nu_n^m &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s)C_3C_3^T(\Phi^{-1}(s))^T ds \\ &= \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \nu_{11} &= \frac{\sigma^2}{2a}(\exp(2at_{n+1}) - \exp(2at_n)), \\ \nu_{22} &= \frac{\eta^2}{2b}(\exp(2bt_{n+1}) - \exp(2bt_n)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{33} = & \frac{\sigma^2}{a^2} (t_{n+1} - t_n - \frac{2(\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n))}{a} + \frac{(\exp(2at_{n+1}) - \exp(2at_n))}{2a}) \\
& + \frac{2\rho\sigma\eta}{ab} (t_{n+1} - t_n - \frac{(\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n))}{a} + \frac{(\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n))}{b} \\
& \quad + \frac{\exp((a+b)t_{n+1}) - \exp((a+b)t_n)}{a+b}) \\
& + \frac{2\sigma\sigma_S\gamma_1}{a} (t_{n+1} - t_n - \frac{\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n)}{a}) \\
& + \frac{\eta^2}{b^2} (t_{n+1} - t_n - \frac{2(\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n))}{b} + \frac{(\exp(2bt_{n+1}) - \exp(2bt_n))}{2b}) \\
& + \frac{2\eta\sigma_S\gamma_2}{b} (t_{n+1} - t_n - \frac{\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n)}{b}) \\
& + \sigma_S^2 (t_{n+1} - t_n).
\end{aligned}$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \frac{\rho\sigma\eta}{a+b} (\exp((a+b)t_{n+1}) - \exp((a+b)t_n))$$

$$\begin{aligned}
\nu_{13} = \nu_{31} = & \frac{\sigma^2}{a^2} (\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n) - \frac{\exp(2at_{n+1})}{2} + \frac{\exp(2at_n)}{2}) \\
& + \frac{\rho\sigma\eta}{b} (\frac{\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n)}{a} - \frac{\exp((a+b)t_{n+1}) - \exp((a+b)t_n)}{a+b}) \\
& + \frac{\sigma\sigma_S\gamma_1}{a} (\exp(at_{n+1}) - \exp(at_n)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{23} = \nu_{32} = & \frac{\rho\sigma\eta}{a} (\frac{\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n)}{b} - \frac{\exp((a+b)t_{n+1}) - \exp((a+b)t_n)}{a+b}) \\
& + \frac{\eta^2}{b} (\frac{\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n)}{b} - \frac{\exp(2bt_{n+1}) - \exp(2bt_n)}{2b}) \\
& + \frac{\eta\sigma_S\gamma_2}{b} (\exp(bt_{n+1}) - \exp(bt_n)).
\end{aligned}$$

이제 미리 3변량 정규분포에서 추출한 난수  $N_n^m \in R^3$ 을 사용하면, 식 (15)의 우변의 표본 경로를 다음과 같이 생성할 수 있다.

$$[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s) C_1(s) ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi^{-1}(s) C_3 dW_s] = \mu_n^m + chol(\nu) \times N_n^m.$$

여기서  $chol(\nu)$ 는  $\nu$ 의 Cholesky 분해(Cholesky decomposition)의 결과로 산출되는 하삼각행렬(lower triangular matrix)이다. 따라서  $Z_n^m$ 과  $Z_{n+1}^m$  사이의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^m &= \Phi(t_{n+1})\Phi^{-1}(t_n)Z_n^m + \Phi(t_{n+1})(\mu_n^m + chol(\nu_n^m) \times N_n^m), \\ &= \Phi(t_{n+1})\Phi^{-1}(t_n)Z_n^m + \Phi(t_{n+1})\mu_n^m + chol(\Phi(t_{n+1})\nu_n^m\Phi(t_{n+1})^T) \times N_n^m. \end{aligned}$$

여기서,  $Z_n^m$ 의 계수인  $\Phi(t_{n+1})\Phi^{-1}(t_n)$ 과  $N_n^m$ 의 계수를 계산하는데 필요한  $\Phi(t_{n+1})\nu_n^m\Phi(t_{n+1})^T$ 는 다음과 같이 계산된다:

$$\begin{aligned} \Phi(t_{n+1})\Phi^{-1}(t_n) &= \begin{bmatrix} \exp(-a\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-b\tau) & 0 \\ \frac{1}{a}(1 - \exp(-a\tau)) & \frac{1}{b}(1 - \exp(-b\tau)) & 1 \end{bmatrix}, \\ \Phi(t_{n+1})\nu_n^m\Phi(t_{n+1})^T &= \begin{bmatrix} \nu'_{11} & \nu'_{12} & \nu'_{13} \\ \nu'_{21} & \nu'_{22} & \nu'_{23} \\ \nu'_{31} & \nu'_{32} & \nu'_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\nu'_{11} &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a\tau)), \\
\nu'_{22} &= \frac{\eta^2}{2b}(1 - \exp(-2b\tau)), \\
\nu'_{33} &= \frac{\eta^2}{2b^3}(-3 - \exp(-2b\tau) + 4\exp(-b\tau)) \\
&\quad - \frac{2\sigma\eta\rho}{ab^2}(1 - \exp(-b\tau)) - \frac{2\sigma\eta\rho}{a^2b}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{2\sigma\eta\rho}{ab(a+b)}(1 - \exp(-(a+b)\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3}(-3 - \exp(-2a\tau) + 4\exp(-a\tau)) \\
&\quad - \frac{2\eta\sigma s\gamma_{2,3}}{b^2}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&\quad - \frac{2\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a^2}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2\tau}{a^2} + \frac{\eta^2\tau}{b^2} + \sigma_s^2\tau + \frac{2\sigma\eta\rho\tau}{ab} + \frac{2\gamma_{1,3}\sigma\sigma s\tau}{a} + \frac{2\gamma_{2,3}\eta\sigma s\tau}{b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu'_{12} = \nu'_{21} &= \frac{\sigma\eta\rho}{(a+b)}(1 - \exp(-(a+b)\tau)), \\
\nu'_{13} = \nu'_{31} &= \frac{\sigma\eta\rho}{a(a+b)}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma\eta\rho}{b(a+b)}(-\exp(-a\tau) + \exp(-(a+b)\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a(a+b)}(1 + \exp(-2a\tau) - 2\exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{b\sigma^2}{2a^2(a+b)}(1 + \exp(-2a\tau) - 2\exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a+b}(1 - \exp(-a\tau)) \\
&\quad + \frac{b\sigma\sigma s\gamma_{1,3}}{a(a+b)}(1 - \exp(-a\tau)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu'_{23} = \nu'_{32} &= \frac{\sigma\eta\rho}{b(a+b)}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{\sigma\eta\rho}{a(a+b)}(-\exp(-b\tau) + \exp(-(a+b)\tau)) \\
&+ \frac{\eta^2}{2b(a+b)}(1 + \exp(-2b\tau) - 2\exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{a\eta^2}{2b^2(a+b)}(1 + \exp(-2b\tau) - 2\exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{\eta\sigma\hat{s}^{2,3}}{a+b}(1 - \exp(-b\tau)) \\
&+ \frac{a\eta\sigma\hat{s}^{2,3}}{b(a+b)}(1 - \exp(-b\tau)),
\end{aligned}$$

본문의  $A_n^m, B_n^m, D_n^m$ 은 따라서 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
A_n^m &= \Phi(t_{n+1})\Phi^{-1}(t_n) \\
&= \begin{bmatrix} \exp(-a\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-b\tau) & 0 \\ \frac{1}{a}(1 - \exp(-a\tau)) & \frac{1}{b}(1 - \exp(-b\tau)) & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^m &= \Phi(t_{n+1})\mu_n^m \\
&= \begin{bmatrix} \exp(-at_{n+1}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-bt_{n+1}) & 0 \\ \frac{1}{a}(1 - \exp(-at_{n+1})) & \frac{1}{b}(1 - \exp(-bt_{n+1})) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds - \frac{1}{2}\sigma_S^2\tau \end{bmatrix} \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds - \frac{1}{2}\sigma_S^2\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_n^m &= chol(\Phi(t_{n+1})\nu_n^m\Phi(t_{n+1})^T) \\
&= chol\left(\begin{bmatrix} \nu'_{11} & \nu'_{12} & \nu'_{13} \\ \nu'_{21} & \nu'_{22} & \nu'_{23} \\ \nu'_{31} & \nu'_{32} & \nu'_{33} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$



또한,  $B_n^m$ 을 계산하기 위해 필요한  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds$ 는 다음 관계식<sup>22)</sup>으로 구할 수 있다:

$$\exp\left(-\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds\right) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[V(0, T) - V(0, t)]\right\},$$

즉

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(s)ds = \log\left(\frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)}\right) + \frac{1}{2}[V(0, T) - V(0, t)],$$

여기서  $P^M(0, T)$ 은 평가 시점에서 관찰한 만기  $T$ 를 갖는 무이표 채권 가격이고, 주어진  $t, T$ 에 대해  $V(t, T)$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T-t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T-t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[ T-t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]. \end{aligned}$$

---

22) Brigo and Mercurio(2007)를 참고하였다.