

현물포트폴리오 및 선물을 이용한 CVaR 기반 ELS 헤징 방법*

이 경 희**

임 현 철***

최 영 수****

< 초 록 >

본 논문은 ELS(Equity Linked Security)시장의 대표적인 상품인 HSCEI를 포함한 두 개의 지수 기반 조기상환 스텝다운(auto call step down)형 ELS에 내재된 헤징위험을 분석하고 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 CVaR(Conditional Value at Risk) 기반 헤징전략을 새롭게 제시한다.

스텝다운형 ELS 구조에 내재된 KI(Knock-In)특성으로 ELS 수익률분포가 비대칭적인 양봉(bimodal) 분포를 따라 평균-분산 최소화 헤징전략은 한계점이 있다. 아울러 항생선물관련 잦은 롤오버 및 현·선물간의 가격괴리 문제와 과도한 항생지수 기반 ELS 발행으로 선물 유동성 부족으로 선물을 이용한 헤징이 어렵다. 이런 문제를 해결하고자 Rockafellar and Uryasev (2002)와 Alexander, Coleman, and Li(2006)가 제안한 방식을 활용하여 1) 지수를 추적하는 현물 포트폴리오를 생성한 후, 2) 현물 포트폴리오와 선물을 이용한 새로운 헤징전략을 제시한다.

실증분석 결과 첫째, CVaR 기반 지수추적 현물 포트폴리오가 시장비율(market ratio), 정보비율(information ratio), Sharpe Ratio을 이용한 평가지표에서 지수추적을 잘 하면서 급락위험(shortfall risk)이 적음을 알 수 있었고, 둘째, 현물 포트폴리오만을 이용한 헤징전략이 선물만을 이용한 헤징전략보다 우수함을 확인할 수 있었다. 정책적인 제안으로 지수 ELS 상품의 기초자산인 지수를 복제하는 ETF(Exchange Traded Fund)가 거래소에 상장된다면 다양한 상품 구조의 증위험·중수익 구조화 상품을 개발할 수 있을 뿐더러 헤징도 원활하게 수행할 수 있을 것이다.

주제어 : 녹-인(Knock-In) 효과, CVaR, ELS, 지수 추적(index TrackingTARC),
헤징 전략

** 동부자산운용 퀀트운용본부, E-mail : khlee@dongbuam.com

*** NICE P&I, E-mail : limhc31@naver.com

**** 교신저자, 한국외국어대학교 수학과, 주소 : 449-791, 경기도 용인시 처인구 모현면 외대로 81,
E-mail : choiys@hufs.ac.kr, 전화 : 031-330-4109

1. 서 론

주가연계증권 (Equity Linked Security, 이하 ELS)은 기초자산인 개별주식의 주가나 주가지수에 연동하여 사전에 정해진 조건에 따라 조기 및 만기상환 수익률이 결정되는 유가증권으로 파생상품의 성격을 갖기 때문에 자본시장법상 파생결합증권으로 분류한다. 글로벌 금융위기이후 저금리 기조가 지속되는 과정에서 은행예금보다 고수익을 제공하고 주식보다 위험이 낮은 특성을 갖은 ELS시장이 빠르게 성장하고 있다. 아울러 주식시장 하락으로 투자자들의 원금손실이 발생¹⁾했음에도 불구하고 예금금리 대비 고금리 쿠폰을 지급하는 ELS에 대한 시장 수요는 지속되고 있다. 특히 개별주식 ELS보다 상대적으로 안전하다고 여겨지는 지수형 ELS 상품으로 쏠림현상까지 나타나고 있다.

현재 발행된 ELS상품의 대부분을 차지하는 스텝다운(step down)형 상품구조는 투자자에게는 기초자산 가격 하락시 원금손실을 내포하고 있으며 헤징 운용자에게는 녹-인(Knock-In; KI) 배리어(barrier) 근처에 몰리면 헤징 물량의 과도한 레버리지를 요구한다. 즉 상품구조적인 측면에서 임현철, 최영수(2015)에서 언급한 급락위험(shortfall risk)을 내포하고 있다. 또 다른 문제점은 지수 ELS상품의 기초자산 쏠림현상²⁾이다. 2016년 1월 항생지수(HSCEI; Hang Sang China Enterprises Index)를 기초자산으로 편입한 ELS 발행잔액 규모는 37조 원으로, ELS 전체 발행잔액의 55%를 차지한다. 항생지수와 함께 지수형 ELS의 4대 기초자산으로 꼽히는 S&P500, 유로스톡스50(EuroStoxx50), 코스피200(KOSPI200)은 녹-인배리어 근처에 진입할 위험이 상대적으로 적다는 평가이지만, 대부분의 지수형 ELS가 두 개 이상의 주가지수를 기초자산으로 삼고 있고 그 중 하나만 녹-인배리어에 들어서도 손실상황이 이뤄질 수 있다.

특히 항생지수는 일반적인 지수 성격보다는 금융업에 집중된 산업섹터지수이므로 코스피200과 같은 산업전체를 포함하는 지수와는 가격변동 위험이 크다는 것을 투자자 및 발행자가 인식할 필요가 있다. 이런 특성으로 2013~14년도에 S&P500와 코스피200의 변동성이 10% 초반 수준일 때, 항생지수 변동성은 20% 초중반 수준이었다. 이와 같이

1) 2008년 금융위기시의 Nikkei 지수 기반 ELS상품의 대규모 손실과 2013-2014년 종목형 ELS 상품에서 손실을 의미한다.

2) KOSPI200 지수보다 높은 변동성을 가진 항생지수의 특성상 발행자에게 유리하고 KOSPI선물과 동일 시간대에 항생선물이 거래되는 헤징 편의성 때문에 많은 물량의 항생지수 기반 ELS가 발행되었다. 반면에 Nikkei선물의 경우는 동일 시간대에 거래되지만 2008년 금융위기 시점에서 주가급락으로 대부분의 투자자가 손실을 입어 투자를 꺼린다.

많은 발행 ELS중에서 항생지수가 기초자산으로 선택된 중요한 요인은 항생지수의 고변동성이 ELS 상품의 높은 쿠폰을 보장할 수 있었기 때문이다.

한편 지수기반 ELS 발행에 따른 헤징도구(hedging instruments)로 현물보다는 유동성이 풍부한 선물이 사용되는 데, 과도한 항생지수 기반 ELS발행과 2015년 후반부터 항생지수 가격하락으로 항생선물 헤징수량이 급격히 증가하는 현상이 나타났다. 또한 항생선물은 1) 1개월 단위의 선물만기로 인해 잦은 롤오버(rollover)을 요구할 뿐 아니라 선물만기에 가까워짐에 따른 지수 대비 선물가격의 괴리율이 S&P500 혹은 코스피200과는 다르게 일정한 패턴이 없고, 2) 현물거래대금 대비 선물거래대금 비율이 코스피200은 5배 수준이나 항생지수는 3.5배 수준으로 낮고 롤오버 기간에 비율이 급격히 증가하는 현상을 보이고 있다. 이런 항생선물의 특성은 선물을 이용한 헤징전략을 구현함에 있어서 현·선물간의 변동성 차이, 롤오버 시행에 따른 정보노출과 가격 괴리로 헤징수량 불일치문제, 고배당으로 선물가격 백워드이션(backwardation) 현상이 지속되어 과도한 헤징 물량 산출문제 등을 발생시킨다. 따라서 단순히 선물을 이용한 헤징 전략에는 한계가 있고 이를 대체할 헤징전략이 필요하다.

기존의 헤징전략을 살펴보면 Rockafellar and Uryasev (2002)는 위험을 줄이기 위해서 VaR(Value at Risk) 최소화 대신에 CVaR(Conditional VaR) 최소화³⁾을 사용하여 금융상품 포트폴리오 최적화 혹은 헤징문제를 다뤘다. 그들은 VaR 계산과 CVaR 최적화 과정⁴⁾을 동시에 진행하면서 $CVaR \geq VaR$ 인 관계를 이용하여 CVaR가 작은 포트폴리오는 VaR도 작은 값을 가짐을 보일 뿐 아니라 VaR보다 CVaR가 훨씬 일관적인 위험측도(consistent measure of risk)임을 보였다.

Alexander, Coleman, and Li(2006)는 파생상품 포트폴리오에 대한 VaR와 CVaR 최소화 문제가 전형적으로 부적절하게 정립된(ill-posed) 문제임을 보이면서 해결 방안으로 CVaR 최적화문제에 관리비용(management cost)을 추가적인 선호기준으로 포함할 것을 제안한다. 즉 많은 헤징도구를 사용하면 관리비용이 많이 발생하므로 헤징도구가 많아짐에 따른 페널티를 최적화 문제에 추가하는 방식으로 문제를 해결하였다.

3) 스텝다운형 ELS와 같이 수익률이 정규분포를 따르지 않는 경우에는 VaR를 이용한 위험측정은 일관된 측도(coherent measure) 역할을 하지 못하고 대신에 CVaR를 사용하여 위험을 측정한다.

4) 선형계획법(linear programming)과 원활하지 않은 최적화기법(nonsmooth optimization)을 사용하여 CVaR 최적화가 이뤄짐을 보였다. 실증분석으로는 헤징도구가 하나인 경우에 적용하여 분석하였고 다량의 헤징도구인 경우에도 적용될 수 있다고 주장한다.

본 논문에서는 (항생)선물만을 이용한 헤징으로 발생하는 문제를 최소화하기 위하여 2단계 방식을 제안한다. 첫째, Rockafellar and Uryasev (2002)가 제안한 방식에 따라 S&P500, KOSPI200, HSCEI 지수를 구성하는 현물을 이용하여 지수추적(index tracking) 현물 포트폴리오를 추적오차 절대값 최소화 및 CVaR 최적화 문제로 먼저 해결한다. 둘째, 앞서 구한 현물포트폴리오를 선물 및 채권과 결합하여 파생상품 포트폴리오 CVaR 최적화 문제로 해결하는 2단계 접근방식을 제안하고자 한다.

KOSPI200, S&P500, HSCEI 지수에 적용하여 분석한 결과는 첫째, 외표본(out-of-sample)에서 CVaR 기반 지수추적 현물 포트폴리오가 일별 오차 샘플 평균, 시장비율(market ratio), 정보비율(information ratio), Sharpe Ratio을 이용한 모든 평가지표에서 지수추적을 잘 하면서 급락위험(shortfall risk)이 적음을 알 수 있었다. 특히 급락위험이 높은 항생지수에서 더욱 좋은 성과를 보임을 알 수 있었다. 둘째, 기초자산이 항생지수 하나인 스텝다운형 ELS에 헤징전략을 적용한 결과 현물 포트폴리오만을 이용한 헤징전략이 선물만을 이용한 헤징전략보다 우수함을 확인할 수 있었다. 정책적인 제안으로 지수 ELS 상품의 기초자산인 지수를 복제하는 ETF(Exchange Traded Fund)가 거래소에 상장된다면 다양한 상품 구조의 중위험·중수익 구조화 상품을 개발할 수 있을 뿐더러 헤징도 원활하게 수행할 수 있을 것이다. 이로 인해 저금리 시대에 수익률을 제고할 수 있는 새로운 상품군을 발굴할 수 있을 것이다.

주가연계증권의 가치평가 모형관련 국내연구로는 구본일, 지현준, 엄영호(2007)와 박준영, 현종석(2009)의 연구가 있다. 구본일 등(2007)은 주가연계예금에 대한 실제 발행가격과 이론가격과의 괴리율을 계산하고 이를 근거로 주가연계예금 발행가격의 특성을 분석하였다. 박준영, 현종석(2009)은 조기상환구조 주가연계증권을 동적으로 복제할 때 발생하는 기대 헤징비용과 헤징 오차 위험(분산)의 상쇄효과(trade-off)를 기초자산 매매에 따른 거래비용을 고려하여 분석한 결과, 거래비용 수준이 헤징 성과에 민감한 영향을 미친다고 보고하고 있다. 한편 주가연계증권의 헤징 관련 국내연구로는 윤선중(2012)과 임현철, 최영수(2015)의 연구가 있다. 윤선중(2012)은 효율적인 헤징을 수행할 수 없었던 복잡한 주가연계 구조화 상품에 대하여 상품 판매량과 연동된 금융상품의 총 델타를 규제하는 구조화 가이드라인을 제시하였다. 임현철, 최영수(2015)는 ELS상품에 내재된 급락위험(shortfall risk)을 관리하는 헤징전략을 제시하였다. 즉, 1) 조기상환 스텝다운(auto call step down)형 특징인 녹-인(Knock-In) 집중현상을 예방하기 위하여 같은 기초자산 기반 ELS 발행금액을 해당 기초자산의 평상시 유동물량과 최대 델타량의 총합을 고려하여 결정해야 하고, 2) 녹-인 영역 혹은

녹-아웃(Knock-Out) 영역과 같이 레버리지가 커지는 핀리스크(pin risk)구간에서는 연속 헤징이 가능하다는 전제하에 구한 BS델타를 이용한 위험관리 한도규정을 완화할 필요가 있음을 지적하고 있다. ELS 투자자 보호측면에서 임성원, 박도현, 빈기범(2016)은 ELS 평가에 내재된 위험뿐 아니라 투자자가 직면할 수 있는 다양한 그림자 위험(shadow risk)을 제시하고 이런 위험으로부터 투자자를 보호할 제도적 필요성을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 지수형 ELS 기초자산이 다양화된 배경과 헤징에 사용되는 지수선물의 특징을 다양한 변동성 측정지표와 유동성 지표를 이용하여 분석하고 KI여부에 따른 ELS 수익률 분포 및 헤징 이슈를 다룬다. 3장에서는 기존 파생상품 포트폴리오의 CVaR 최적화 방법을 소개, 헤지펀드 운용과 스텝다운형 ELS 간의 상품 특성비교, 현물을 이용한 CVaR 기반 지수추적 방법, 마지막으로 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 헤징방법을 새롭게 제안한다. 실증분석으로는 CVaR 기반 지수 추적방법의 우수성과 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 ELS 헤징방법의 우월성을 비교분석하고, 4장에서는 본 연구의 결론을 도출하였다.

II. 지수형 ELS 기초자산의 특징 및 헤징관련 이슈

1. 기초자산 지수의 다양화 : 현·선물 변동성, 유동성, 및 괴리율 분석

초기 ELS는 KOSPI200 지수와 삼성전자 등 주식시장을 대표하는 우량대형주를 기초자산으로 하여 발행되었다. 많은 투자자들이 2008년 금융위기를 거치며 ELS 투자를 통해 큰 손실을 볼 수 있다는 것을 인지하게 되었으나, 안정적인 수익률을 추구하는 투자자들의 성향에 맞는 ELS⁵⁾는 지속적으로 발행규모가 늘어나며 꾸준히 성장해왔다. 금융위기 이후 유럽 재정위기 등 몇 차례 주식시장의 하락을 거치며 개별종목을 기초자산으로 한 ELS가 녹-인(Knock-In; KI)되어 조기상환이 되지 않거나, 큰 손실로 만기상환 되는 경우가 발생하기 시작하면서 개별종목 대신 시장 대표지수인 KOSPI200을 기초자산으로 하는 ELS로 발행이 집중되는 현상이 나타났다. 2012년 이후 KOSPI200

5) 대표적인 ELS 상품은 “2 Index 조기상환형 스텝다운 ELS” 으로 수익구조가 자동조기상환과 만기상환으로 구분되는 데, ELS 발행자 입장에서는 자동조기상환일 혹은 만기일에 조건부 디지털 콜옵션(Digital Call Options)을 매도하고 ELS 만기일에 조건부 녹-인 풋옵션(Plain Put Option)을 매수한 합성포지션을 갖는 것과 같다.

지수의 변동성이 20% 이하로 낮아지면서 해외 지수를 포함한 “2 Index 조기상환형 스텝다운(auto call step down)형 ELS”의 발행이 증가하기 시작했다. 대표적인 해외지수는 S&P500, EuroStoxx50, HSCEI 지수 등이며, 대부분의 ELS가 KOSPI200 지수 포함 4개의 지수 중 2개 또는 3개를 기초지수로 하여 발행되었다.

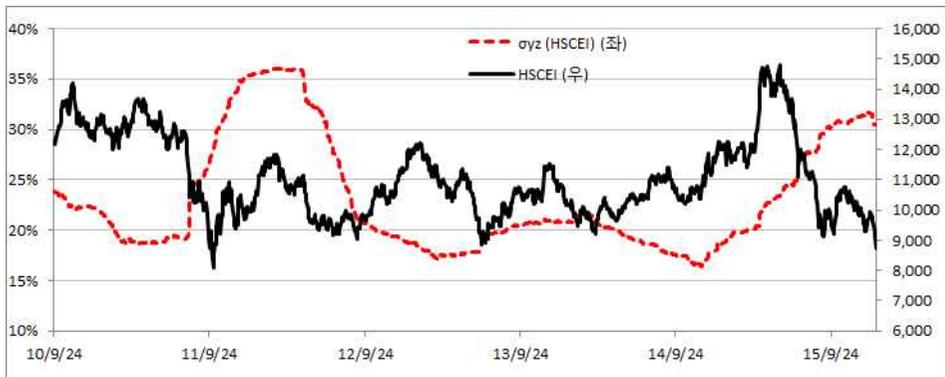
<표 1>은 연도별 대표지수 평균변동성을 나타내고 <그림 1>은 해당일 과거 1년 동안의 자료를 이용하여 산출한 HSCEI지수 역사적 변동성인 데, KOSPI200 지수의 변동성은 꾸준히 하락한 반면 HSCEI지수의 변동성은 20% 이상을 유지하여 채권보다 높은 수익률을 담보할 수 있는 ELS 상품의 기초자산으로서의 매력력이 높았음을 알 수 있다. 따라서 2012년 이후에는 국내지수인 KOSPI200보다 변동성이 높은 EuroStoxx50 이나 HSCEI 지수가 기초자산으로 선택되는 경우가 많이 발생하였다. 이로 인해 ELS시장에서 HSCEI 지수가 기초자산으로 포함된 ELS의 발행규모는 30조 이상을 차지하게 되었다.

<표 1> 연도별 대표지수 평균변동성

지수	KOSPI200	S&P500	EuroStoxx50	HSCEI
2010	16.55%	18.01%	23.76%	24.46%
2011	27.69%	23.42%	28.08%	31.10%
2012	17.46%	13.01%	21.16%	21.61%
2013	13.89%	11.66%	16.63%	21.37%
2014	11.28%	10.94%	16.03%	18.54%
2015	13.15%	15.47%	23.46%	28.97%

*각 지수의 연도별 일간수익률의 표준편차 값을 사용하여 계산한 변동성의 평균

<그림 1> HSCEI 주가 및 변동성 추이



주) 항생지수 일별 시·고·저·종가를 사용하여 Yang and Zhang(2010)이 제안한 방식으로 해당일 과거 1년간의 자료를 이용하여 구한 역사적 변동성을 산출하였다.

<표 2> 대표지수 업종 비중 및 국가 비중

<패널 A> EuroStoxx50 업종 및 국가 비중

업종	비중
Banking	16.7%
Industrial Goods & Services	9.7%
Chemicals	9.2%
Insurance	8.4%
Health Care	6.8%
Personal & Household Goods	6.6%
Oil & Gas	6.4%
Automobiles & Parts	6.3%
Telecommunications	6.0%
Technology	6.0%

<패널 B> HSCEI 업종 비중

국가	비중	업종	비중
France	36.5%	Financial	69.45%
Germany	32.4%	Energy	12.42%
Spain	10.5%	Properties & Construction	5.73%
Netherlands	7.7%	Consumer Goods	5.22%
Italy	7.5%	Telecommunications	2.44%
Belgium	4.1%	Utilities	2.91%
Finland	1.2%	others	1.83%

<패널 C> S&P500 업종 비중

업종	비중
Information Technology	20.70%
Financials	16.50%
Health Care	15.20%
Consumer Discretionary	12.90%
Consumer Staples	10.10%
Industrials	10.00%
Energy	6.50%
Utilities	3.00%
Materials	2.80%
Telecommunication Services	2.40%

<패널 D> KOSPI200 업종 비중

업종	비중
정보기술	29.98%
자유소비재	15.21%
금융	12.23%
산업	10.82%
소재	9.67%
기본소비자식료품	9.34%
전기통신서비스	3.46%
공익사업체	3.10%
에너지	2.53%
건강관리	2.09%

<그림 1>에서 보여주듯이 2015년 하반기부터 급락하기 시작한 HSCEI 지수는 2016년 초 8,000pt 이하로 하락하여 HSCEI를 기초자산으로 하여 발행되었던 ELS 중 일부가 녹-인되는 경우가 발생했다. 녹-인되지 않은 ELS 역시 발행 시점 대비 HSCEI 지수 하락률이 커지면서 평가손실 상태에 놓여 있다. 이는 투자자들의 손실뿐 아니라 발행사의 헤징 손실도 발생시켜 시장에서 큰 이슈가 되기도 하였다. 아직 ELS의 만기가 많이 남아 있어 HSCEI 지수가 만기시점에 행사가격 이상으로 올라간다면 투자자는

수익을 얻을 수 있지만 발행사의 헤징 손실은 실제로 줄어들 수 있을지 알 수 없는 상황이다. 홍콩시장이 불안정해지면서 감독당국 역시 HSCEI를 기초자산으로 하는 ELS 발행을 줄이도록 유도하고 있어 현재 HSCEI를 기초자산으로 하는 ELS의 발행 잔고는 크게 늘지 않고 있으며, HSI 등 다른 대체 지수에 대한 발행 등이 조금씩 이루어지고 있다.

ELS 기초자산으로 선택되는 대표적인 지수들에 대한 변동성 및 유동성 비교를 통해 향후 ELS 발행, 헤징 운용 및 투자할 때 참고사항을 점검하고자 한다. 먼저 <표 2>에서 대표지수들의 업종 비중을 보면, KOSPI200과 S&P500의 업종 비중은 유사함을 알 수 있고 EuroStoxx50은 모든 업종이 골고루 구성되어 있다. 하지만 HSCEI는 금융과 에너지 업종 비중이 약 82(= 70 + 12)%로 전체 산업을 아우르는 지수이기 보다는 금융 산업에 치중된 산업섹터지수에 가깝다는 사실을 알 수 있고 이로 인해서 KOSPI200과 같은 지수기반 ELS 상품과는 위험의 정도가 다름⁶⁾을 유추할 수 있다. 이러한 업종구성 비율의 차이가 지수의 변동성에 어떻게 반영되어 나타나는 지를 알아보자.

1.1 현·선물 변동성 분석

대표지수 가격변동 폭의 특성을 분석하기 위해 변동성의 제곱인 분산을 먼저 정의하자. 가장 일반적인 분산의 불편 추정량(unbiased estimator)은 일간수익률(전일종가 대비 당일종가)을 이용하여 계산한 표본분산이다. 추정오차를 줄이기 위해서 Yang and Zhang(2000)이 제안한 최소 분산 불편 분산 추정량(minimum-variance unbiased variance estimator) V_{YZ} 은 전일종가 대비 당일시가 수익률을 이용하여 계산한 표본분산 V_O , 당일시가 대비 당일종가 수익률을 이용하여 계산한 표본분산 V_C , 및 당일 시·고·저·종가를 이용하여 계산한 표본분산 V_{RS} 로 구성된 표본분산의 가중합으로 다음과 같이 표시된다.

$$V_{YZ} = V_O + k V_C + (1 - k) V_{RS}, \quad (1)$$

여기서 상수 k 는 $0 < k < 1$ 을 만족하므로 V_{YZ} 는 V_O 보다 큼을 알 수 있다.

<그림 2>는 KOSPI200, HSCEI, S&P500의 현·선물의 변동성 $\sigma_{YZ} = \sqrt{V_{YZ}}$ 와 $\sigma_O = \sqrt{V_O}$ 의 변화추이를 나타낸다. 유럽재정위기로 인해서 2011년 9월 이후 2012년

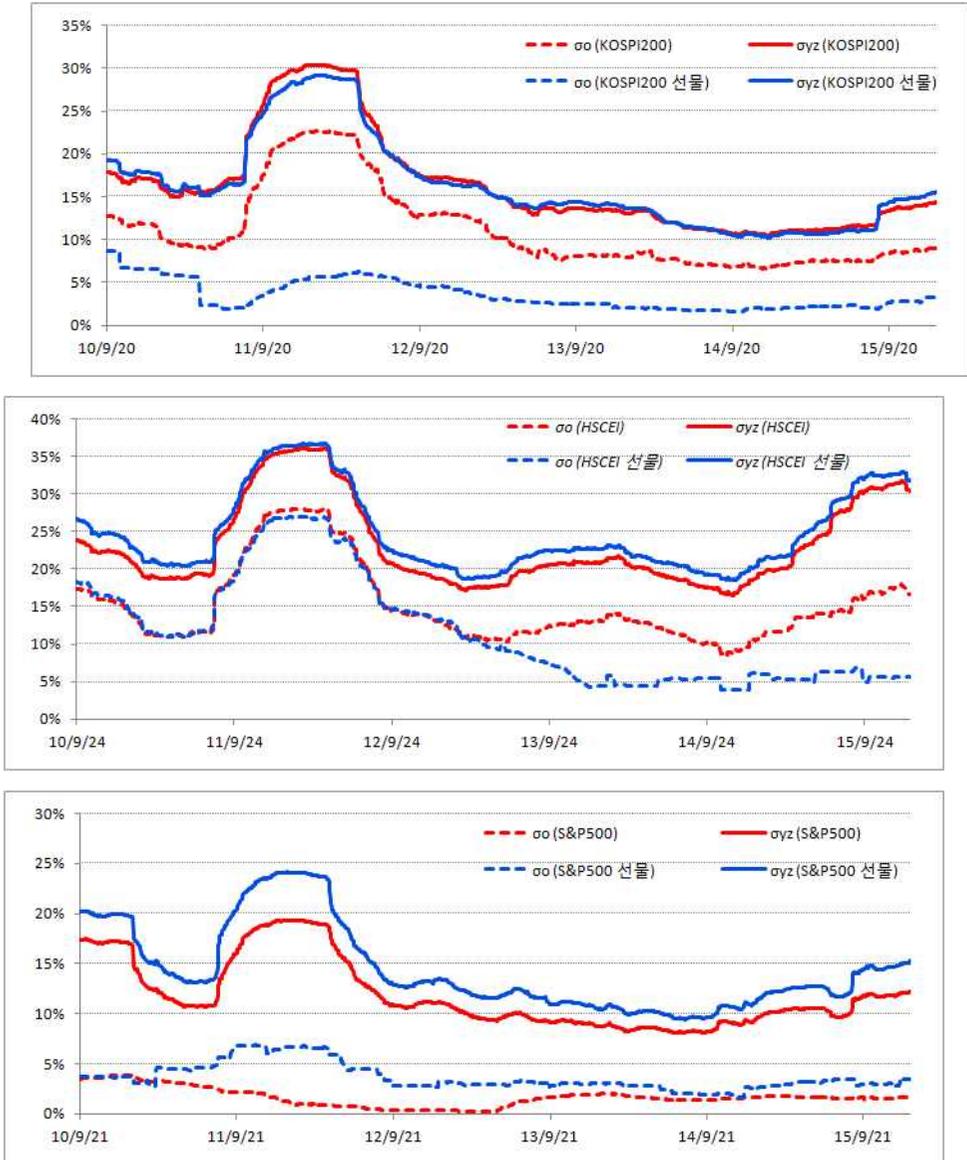
6) 예를 들어, 2015년 4월중 아시아 인프라 투자은행(Asian Infrastructure Investment Bank; AIIB) 호재로 주가가 40% 이상 상승하였다.

9월까지 변동성이 급격히 커졌다가 지속적으로 감소하는 현상을 보이고 있으나 HSCEI는 2014년 10월 이후부터 다시 변동성이 확대되는 현상⁷⁾을 보이고 있다. 현·선물간의 변동성 σ_{YZ} 의 차이를 보면 KOSPI200는 거의 없고 HSCEI과 S&P500는 2~3% 정도 선물의 변동성이 큼을 알 수 있고 이런 현상이 선물을 사용하여 ELS을 헤징할 때, 선물포지션의 수량을 결정하는 데 어려움으로 작용할 수 있다. 현·선물간의 변동성 σ_o 의 차이를 보면 KOSPI200는 현물변동성이 선물변동성보다 대략 5~6%정도 높고 이는 KOSPI200 선물은 유동성이 풍부하고 미래지향적인 선물계약의 특성으로 나타난 것으로 판단된다. 반면에 HSCEI는 2013년 말 이후부터 선물변동성은 5%수준에서 유지되고 있으나 현물은 10~18%의 높은 변동성을 유지하고 있고 S&P500는 1~3% 정도 선물의 변동성이 큼을 알 수 있다.

σ_o 값과 σ_{YZ} 값의 차이를 통해서 지수시장들의 특징을 살펴보면, 먼저 현물의 경우에는 KOSPI200과 HSCEI의 σ_o 값은 σ_{YZ} 값의 0.6 수준이나 S&P500의 σ_o 값은 σ_{YZ} 값의 0.1 수준으로 상대적으로 매우 낮음을 알 수 있다. 즉, S&P500 지수는 전일종가 대비 당일시가의 변동폭이 매우 작아 오버라이트(over night)에 따른 영향이 적음을 알 수 있다. 반면 KOSPI200이나 HSCEI 지수는 당일 시가에 점프(jump)가 있는 경우가 많으며, 이는 전일 미국 등 선진국 시장의 변동에 따라 시가가 움직이는 글로벌 동조화 현상에 기인한다고 판단된다. 이처럼 “지수의 시가변동성 σ_o 가 크다”는 특징이 ELS 헤징을 하는 과정에 영향을 미칠 수 있을 것이다. 감마(Γ) 포지션의 변동이 크지 않은 구간에서는 시가의 변동에 따라 헤징포지션에 큰 변화를 줄 필요가 없을 수 있지만 감마 포지션의 변동이 크게 변할 수 있는 상황, 예를 들어 감마매수(long gamma)에서 감마매도(short gamma)로 변하는 상황, KI이 발생 가능한 지수 수준, 혹은 행사가격에 근접한 지수 수준인 상황에서는 전일 종가와와 가격 등락폭이 큰 상황에서 헤징매매 대응이 쉽지 않을 수 있으며 이로 인해 헤징포지션의 손실이 확대될 수도 있을 것으로 보인다. 한편 주로 헤징 수단이 되는 선물의 경우에는 KOSPI200(HSCEI, S&P500)의 σ_o 값은 σ_{YZ} 값의 0.2(0.33, 0.25)수준으로 비슷한 패턴을 보이고 있다.

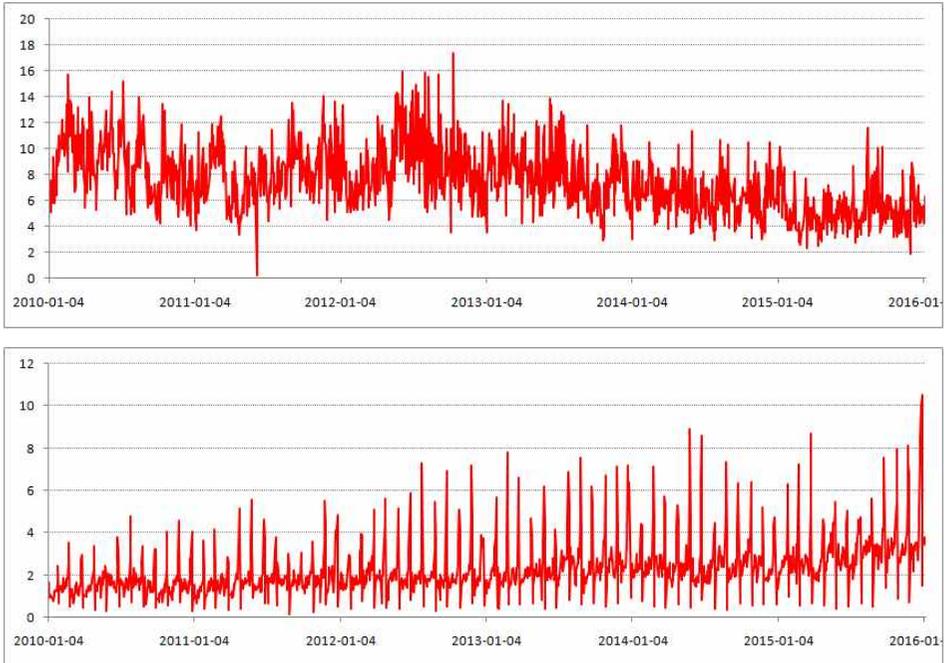
7) 이런 현상이 HSCEI가 KOSPI200, S&P500와 같은 전체 산업기반 지수와의 차별성으로 종합주가지수로서 유사한 특성을 가졌다는 판단이 HSCEI에 내재된 위험을 과소평가할 수 있다.

<그림 2> KOSPI200, HSCEI, S&P500 지수의 변동성 추이



주) 2010년 1월 4일부터 2016년 1월 7일까지의 각 지수의 일별 시·고·저·종가를 사용하여 Yang and Zhang(2010)이 제안한 식 (1)을 이용하여 V_{YZ} 와 V_O 을 계산하였다. 해당 일 과거 1년간의 자료를 이용하여 구한 후, 시간이 지남에 따라 이동창(moving window) 개념으로 자료를 사용하여 구한다. 빨간색(파란색) 굵은 실선은 현물(선물) 변동성 σ_{YZ} , 빨간색(파란색) 굵은 점선은 현물(선물) 변동성 σ_O 을 나타낸다.

<그림 3> 일별 현물거래대금 대비 선물거래대금 비율 : KOSPI200(上) vs. HSCEI(下)



주) 2010년 1월 4일부터 2016년 1월 7일까지의 KOSPI200 및 HSCEI의 일별 현물거래대금 대비 선물거래대금의 비율을 나타낸 것이다.

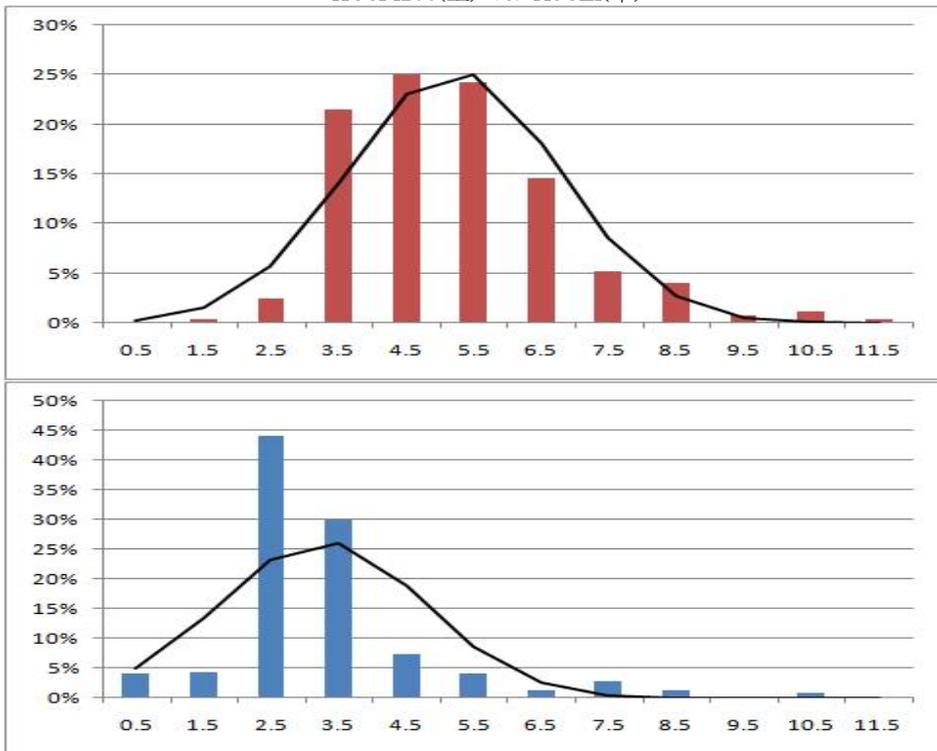
1.2 현·선물 유동성 분석

지수기반 ELS 발행에 따른 헤징도구로 현물 및 선물이 사용되는 데, 일평균 거래대금을 살펴보면 KOSPI200 현물(선물)은 3조원(15조원)이고 HSCEI 현물(선물)은 2조원(7조원)이다. <그림 3>은 일별 선물거래대금을 현물거래대금으로 나눈 비율을 시계열로 나타낸 것으로 KOSPI200(HSCEI) 평균 비율은 5(3.5)배로 KOSPI200 선물 유동성이 HSCEI 선물 유동성보다 풍부함을 알 수 있다.

최근 KOSPI200 선물시장은 꾸준히 거래대금 비율이 감소하고 있으나 여전히 현물시장 대비 최소 3배 수준의 거래규모를 보이는 유동성이 풍부한 시장으로 볼 수 있다. 반면 HSCEI 선물은 거래규모가 조금씩 증가하는 모습이지만 특이한 패턴을 나타내는 것을 확인할 수 있다. 주기적으로 선물거래량이 급격히 증가하는 패턴이 반복되는데 이는 매월 만기가 돌아오는 선물 롤오버(roll-over) 물량 때문에 월말 무렵 급격히 거래가 증가하는 것으로 볼 수 있으나, KOSPI200 선물은 3개월마다 만기가 돌아오더라도 HSCEI선물과 같은 주기적 패턴이 약하게 나타난다. 아울러 최소 거래대금 비율 대비

최대 거래대금 비율로 KOSPI200은 2~3배이나 HSCEI는 4~5배로 선물 롤오버효과 차이가 있음을 알 수 있다. 특히 2015년 중반부터 HSCEI 기반 ELS가 많이 발행되어 발행잔액이 지속적으로 증가함에 따라 HSCEI 현물 대비 선물 거래대금비율이 지속적으로 증가하고 있다. 이는 ELS 발행잔액 증가에 따른 헤징 도구로 선물을 사용함으로써 나타난 현상으로 이해된다.

<그림 4> 2015년 일별 현물거래대금 대비 선물거래대금 비율 분포 : KOSPI200(上) vs. HSCEI(下)



주) 2015년 1월 2일부터 12월 31일까지의 KOSPI200 및 HSCEI의 일별 현물거래대금 대비 선물거래대금 비율의 빈도수를 산포도(scattergram)로 나타낸 것이다.

<그림 4>는 2015년 일별 현물 대비 선물 거래대금 비율 자료를 이용하여 산포도를 그린 것으로 KOSPI200은 평균 5를 중심으로 정규분포에 근사한 대칭구조를 갖고 있으나 HSCEI는 평균 3.5를 중심으로 비대칭 분포를 갖고 있으며 주로 2~3의 값을 갖고 최소와 최대간의 편차가 매우 큰 분포를 가짐을 알 수 있다. 이는 일별 거래금액이 홍콩시장 내부수요보다 한국 ELS시장의 헤징 수요 과다로 발생한 현상으로 홍콩시장 자체의

안정성을 해칠 뿐만 아니라 이를 이용하고자 하는 투기 세력⁸⁾에게 기회를 제공할 수도 있다.

1.3 지수 대비 선물가격 괴리율 분석

<그림 5>는 2010년 1월부터 2016년 1월 초까지의 자료를 이용하여 선물가격에서 지수를 뺀 베이스(basis)을 지수로 나눈 값을 괴리율로 계산하여 나타낸 그림이다. S&P500는 배당률 대비 무위험이자율이 낮아서 백워드이션(backwardation) 현상이 나타나며, 3개월 단위의 선물만기에 가까워짐에 따라서 음(-)의 괴리율이 점점 줄어들었다가 롤오버가 일어나면 다시 확대되는 현상이 지속적으로 나타남을 알 수 있다. 반면에 KOSPI200는 배당률 대비 무위험이자율이 높아서 콘탱고(contango) 현상이 나타나며, 3개월 단위의 선물만기에 가까워짐에 따라서 양(+)의 괴리율이 점점 줄어들었다가 롤오버가 일어나면 다시 확대되어 나타난다. HSCEI는 1개월 단위의 선물만기로 인해서 KOSPI200이나 S&P500에서 나타나는 주기적인 패턴이 관찰되지 않고 콘탱고와 백워드이션이 혼재⁹⁾되어 나타남을 알 수 있다. 특히 백워드이션이 나타날 때, 괴리율이 다른 지수에 비해서 매우 큼을 알 수 있고 이러한 현상이 항생선물을 이용한 헤징을 어렵게 할 수 있음을 알 수 있다.

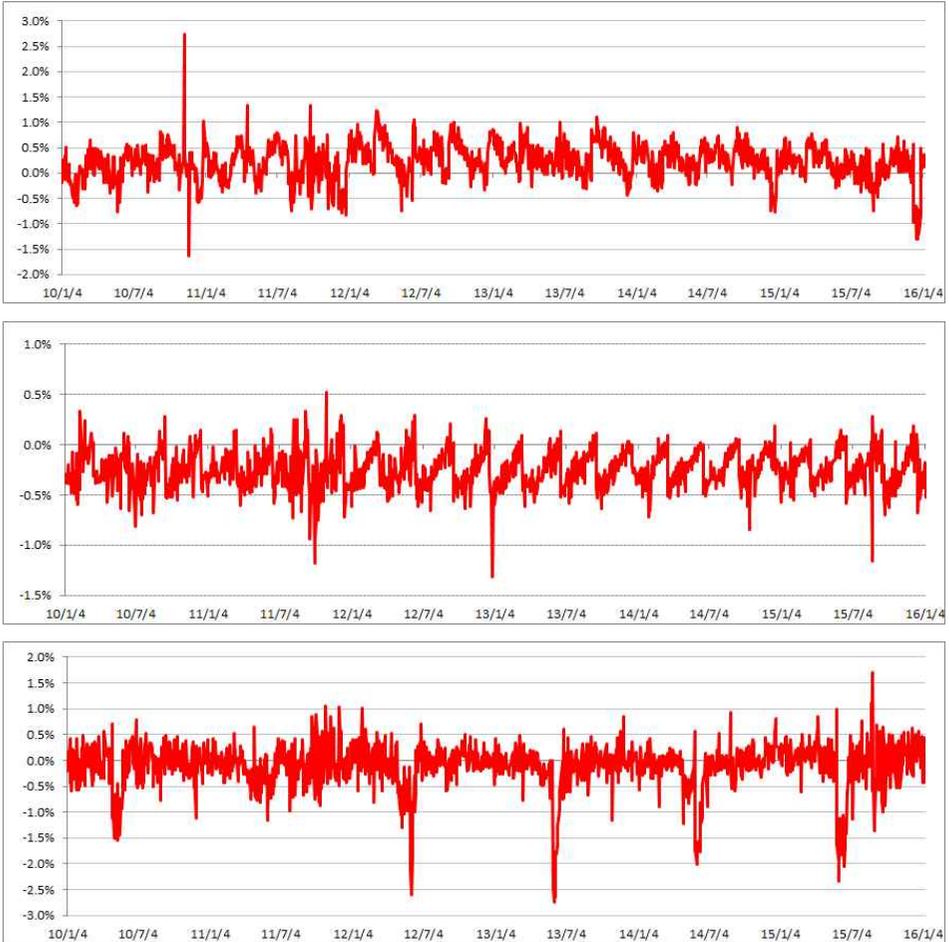
2. 구조에 따른 수익률 분포 분석

본 절에서는 현재 발행된 ELS상품의 대부분을 차지하는 스텝다운형 ELS상품의 수익률을 살펴보고 상품구조에 내재된 KI 터치 여부에 따라서 상품의 수익률 분포가 어떻게 달라지는 분석해보자.

8) KI영역 근처에서 해외투기자[한국 ELS 발행잔고 및 KI 가격구조를 파악한 후, 이를 활용하려는 투기세력을 지칭함]는 HSCEI 선물을 매도한다. 왜냐하면 ELS 발행자는 KI직전까지 대량의 HSCEI 선물을 매수하기 때문이다. 해외투기자는 HSCEI 선물 매도로 항생지수가 KI를 터치할 경우 ELS 발행자는 헤징포지션을 매도해야 하고 이 과정에서 항생선물은 추가적으로 더 하락할 수 있다. 이때 해외투기자는 자신의 보유 포지션을 환매, 즉 매수로 청산하여 이익을 얻게 된다.

9) 배당수익률이 무위험이자율보다 높아 백워드이션 시장이 정상인 상태이나 혼재되어 나타나는 이유는 한국의 ELS 헤징수요와 같은 잠재적인 매수 수요가 있기 때문이다.

<그림 5> 선물가격의 지수 대비 괴리율 : KOSPI200(上) vs. S&P500(中) vs. HSCEI(下)



주) 2010년 1월 4일부터 2016년 1월 7일까지의 KOSPI200, S&P500, 및 HSCEI의 일별 선물가격의 지수 대비 괴리율 $[(\text{선물가격}-\text{지수})/\text{지수}]$ 을 계산하여 나타낸 것이다.

임현철, 최영수(2015)에서와 같이 전형적인 ELS 상품은 <표 3>과 <그림 6>에서와 같이 “2 Index 조기상환형 스텝다운(auto call step down)형 ELS”이다. 두 개의 기초자산인, 예를 들어 코스피200지수와 항생지수 중 최초기준가격 대비 더 낮은 기초자산 가격이 상환조건을 달성하는지에 따라 손익이 결정되므로 결국 2개의 기초자산이 모두 상환조건을 충족해야 수익상환이 되는 구조이다. 따라서 손익구조에 영향을 크게 미치는 1) 만기-조기상환 일정과 2) 최초기준가격, 조기상환평가가격 및 만기평가가격이 명확하게 지정된다.

<표 3> 대표적인 TARC인 조기상환형 스텝다운 ELS의 수익구조

구분	내용	투자수익률
자동 조기상환	① 1차(6개월), 2차(12개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 90% 이상인 경우 ② 3차(18개월), 4차(24개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 85% 이상인 경우 ③ 5차(30개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 80% 이상인 경우	연 8.0%
만기상환	④ 두 기초자산의 만기평가가격이 모두 최초기준가격의 80% 이상인 경우	연 8.0% (만기시 24.0%)
	⑤ 투자기간 중 최초기준가격의 60% 미만으로 하락한 기초자산이 없고, 두 기초자산 중 어느 한 기초자산이라도 만기평가가격이 최초기준가격의 80% 미만인 경우	만기시 24.0%
	⑥ 투자기간 중 최초기준가격의 60% 미만으로 하락한 기초자산이 있고, 두 기초자산 중 어느 한 기초자산이라도 만기평가가격이 최초기준가격의 80% 미만인 경우 → 원금손실	-20%~-100% (손실률 = 하락폭이 큰 기초자산의 하락률)

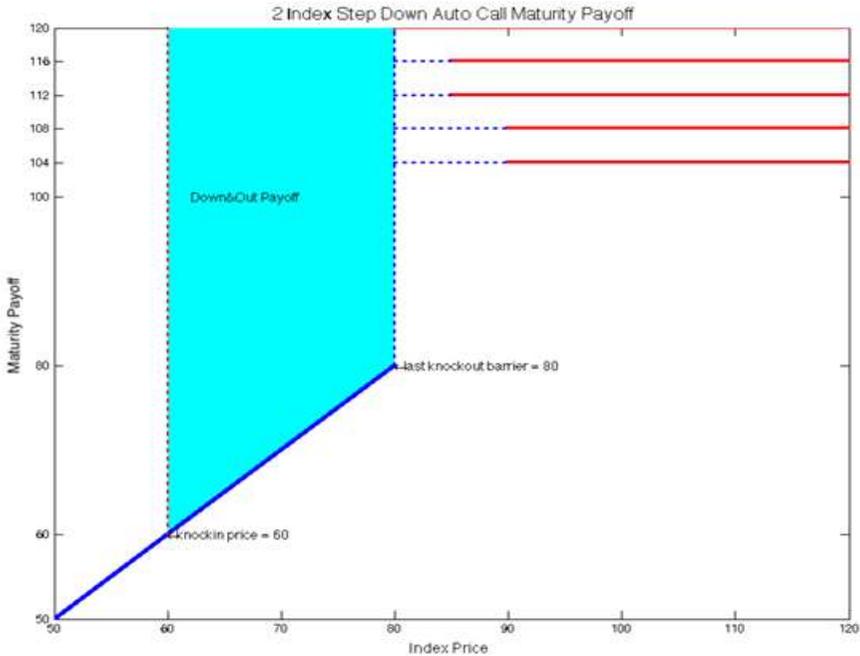
*평가가격은 평가일의 종가기준임.

상품의 수익률분포를 계산하기 위하여, 코스피200지수(항생지수)의 배당률은 1%(4%), 변동성은 20%(30%), 무위험 이자율은 2%(2%), 두 지수간의 상관계수는 0.6으로 가정한 상황에서 몬테카를로 시뮬레이션을 10만회 실시하였다. <그림 7>에서 수익률은 투자원금 대비 회수금을 단순수익률로 전환한 것으로 연 수익률 개념이 반영되어 있지 않다. 그림 7은 발행당시의 수익률분포로 분포가 정규분포와는 매우 상이하므로 확률밀도함수와 아울러 누적분포함수를 표시하였다. 약 56%정도가 6개월 이내에 조기상환되어 4% 수익률을 얻을 수 있으나 약 22%정도는 손실률이 80%에서 20%까지 발생할 수 있음을 알 수 있다. 아울러 약 22%정도는 6개월 이내에 조기상환 되지 않고 1년에서 3년까지 순차적으로 순연되어 조기상환 확률은 감소하고 있음을 알 수 있다.

그림 8과 9는 만기 3개월 전에 조기상환 되지 않았고 그 시점에서 코스피200지수(항생지수) 가격은 발행시점 대비 85%(75%)임을 가정하자. 8과 같이 3개월 전에 KI를 터치한 경우에는 약 73%정도가 원금손실을 볼 수 있고 약 27%정도는 만기상환 될 수 있음을 알 수 있다. 그림 9와 같이 KI를 터치하지 않은 경우에는 반대로 약 75%정도는 만기상환 될 수 있고 약 25%정도는 원금손실을 볼 수 있다. 즉 상품구조에 KI 존재여부가

원금손실여부를 결정하는 중요한 요소임을 알 수 있다.

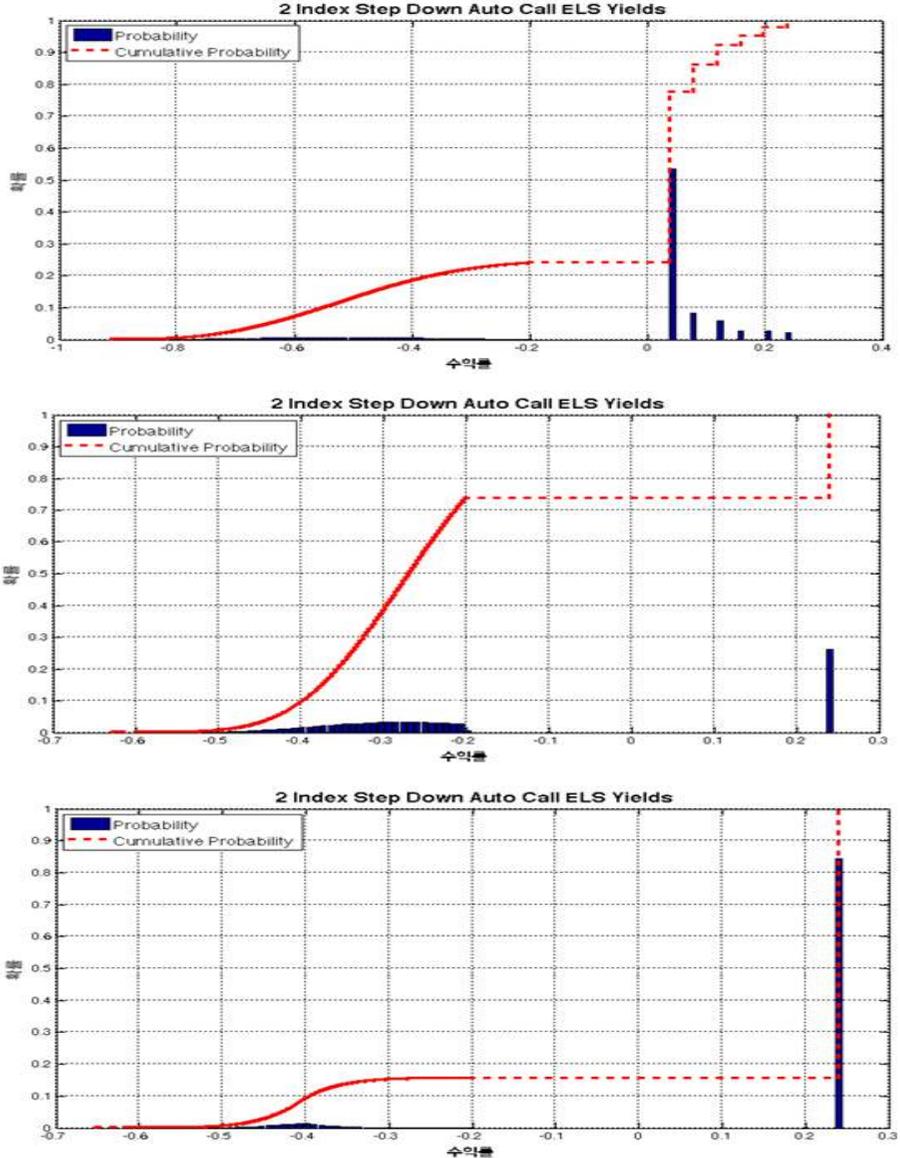
<그림 6> 전형적인 2 Index 조기상환형 스텝다운 ELS의 수익함수 그래프



앞의 분석과 같이 KI 존재여부와 무관하게 스텝다운형 ELS의 수익률분포는 정규분포가 아닌 매우 음(-)으로 왜곡된 분포를 가지므로 파생상품 포트폴리오 헤징 전략에서 VaR 보다는 CVaR¹⁰로 위험을 측정해야 운용자 손실을 줄일 수 있음을 알 수 있다.

10) VaR는 손익분포의 한계치를 제공하는 값이며 손실이 한계치 이상에서 더 크게 나타날 수 있는 비선형 수익구조가 특징인 파생상품을 포함하는 포트폴리오 그리고 변동성에 대한 전략이 많은 헤지펀드에서는 위험을 과소 측정할 수 있다. 그리고 가장 큰 결점으로 개별자산의 VaR값들의 합보다 이들로 구성된 포트폴리오의 VaR값이 더 크게 나타날 수 있는 리스크의 분산효과를 충족시키지 않는 경우가 존재한다. 따라서 분포에 민감하지 않은 일관된 위험측도(coherent risk measure)인 CVaR를 사용한다.

<그림 7> 수익률 분포 : 발행당시(上), 만기 3개월 전 KI을 터치한 경우(中), 만기 3개월 전 KI을 터치를 안한 경우(下)



주) 코스피200지수(항생지수)의 배당률은 1%(4%), 변동성은 20%(30%), 상관계수는 0.6이고 무위험 이자율은 2%(2%)로 가정한 상황에서 몬테카를로 시뮬레이션을 10만회 실시한 결과를 근거로 투자원금 대비 회수금을 단순수익률로 표시한 것으로 연 수익률 개념으로 전환하지 않았다. 그림 中과 下는 만기 3개월 전까지 조기상환 되지 않았고 코스피200지수(항생지수)의 그 시점의 가격은 발행시점 대비 85%(75%)임을 가정한다.

3. 헤징 이슈

본 절에서는 헤징관련 이슈를 다룬다. 일반적으로 선물시장의 유동성은 현물시장에 비해 높은 편이고 지수 ELS상품의 기초자산이 지수이므로 ELS에 대한 헤징포지션을 지수선물을 이용하여 운용할 경우 거래비용을 줄일 수 있는 방법으로 선호될 수 있다. 따라서 선물을 이용한 헤징관련 이슈를 먼저 분석하고 이에 따른 문제해결 방안을 제안하고자 한다.

헤징관련 이슈를 살펴보기에 앞서 발행된 ELS 상품구조를 보면 대부분이 스텝다운(step down)형이다. 임현철, 최영수 (2015)에서 언급했듯이 이런 상품구조는 투자자에게는 기초자산 가격 하락시 원금손실을 내포하고 있으며, 헤징 운용자에게는 녹-인베리어 근처에 몰리면 헤징 물량의 과도한 레버리지를 요구한다. 즉 급락위험을 내포하는 상품구조를 갖고 있어서 헤징전략을 수립함에 있어서 과도한 레버리지를 어떠한 수준에서 결정해야 헤징 손실을 줄이느냐가 관건이다. 또 다른 특징은 지수 ELS상품의 기초자산 쏠림현상이다. 2015년 1월 항생지수를 기초자산으로 편입한 ELS 발행잔액 규모는 37조 원으로, ELS 전체 발행잔액의 55%를 차지한다. 항생지수와 함께 지수형 ELS의 4대 기초자산으로 꼽히는 S&P500, 유로스톡스50(EuroStoxx50), 코스피200(KOSPI200)은 녹-인베리어 근처에 진입 위험이 적다는 평가이지만, 대부분의 지수형 ELS가 두 개 이상의 주가지수를 기초자산으로 삼고 있고 그 중 하나만 녹-인베리어에 들어서도 손실상황이 이뤄질 수 있다. 따라서 논의의 쟁점을 항생지수기반 헤징전략을 행함에 야기되는 이슈 중심으로 전개하고자 한다.

선물을 이용한 헤징시 발생하는 위험은 현·선물간의 변동성 차이, 롤오버 시행에 따른 정보 노출, 가격 괴리로 헤징수량 불일치문제, 고배당으로 인한 과도한 헤징 물량 산출문제 등이 있다. 첫째, 1절의 현·선물 변동성분석에서 언급했듯이 현·선물간의 변동성 차이가 존재하는 상황에서 헤징 수량을 결정할 때에는 현물 변동성을 기준으로 하는 데, 헤징도구는 선물을 사용함으로써 헤징수량의 불일치 문제가 발생할 수 있다. 둘째, 항생지수 선물의 만기는 매일 있으므로 헤징도구로 선물을 이용할 경우 매일 롤오버를 해야 한다. 한국시장에서 과다한 항생지수 기반 ELS 발행으로 헤징 선물물량 수요가 많은 것을 파악한 투기 세력에게 투기 기회를 제공하여 매도-매수호가 스프레드(bid-ask spread) 확대로 인해서 헤징 비용이 증가할 수 있다. 셋째, 항생지수의 배당은 4% 수준이나 무위험 이자율은 0.5~1%수준으로, <그림 5>에서와 같이 콘탱고와 백워레이션이 혼재¹¹⁾되어 나타날 뿐 아니라 이산적인 배당성격으로 불안정한 델타

헤징을 야기한다. 따라서 항생지수 기반 ELS의 헤징에 현물대신 선물을 이용하는 과정에서 다양한 원인으로 현· 선물 가격괴리가 발생하고 이 결과 헤징 불일치 문제를 발생시킨다. 그래서 다음 장에서는 이런 문제를 해결하는 방안으로 선물 대신에 1) 지수를 추적하는(index tracking) 현물 포트폴리오를 어떻게 구성하는 것이 최적인가, 2) 현물과 선물을 어떻게 결합하는 것이 헤징비용을 감소시키는 가를 살펴 볼 것이다.

추가적으로 ELS 헤징운용에 어떤 변동성을 사용할 것인가를 살펴보면, 일반적으로 변동성이 높아야 발행자는 ELS를 비싸게 매도할 수 있으나, 운용자가 헤지를 시행할 때에는 ELS상품의 구조가 감마매수 상황에서는 실제 변동성 대비 높은 변동성을 사용하면 헤징 운용 손실이 발생한다. 즉, 실제 변동성이 축소되면 평가손실이 발생하고 누적 운용 손실이 발생할 가능성이 높다. 대안으로 플랫폼변동성(flat volatility)과 로컬변동성(local volatility)을 고려할 수 있다. 첫째, 플랫폼(flat) 변동성을 사용할 경우 발행을 위하여 높은 변동성을 사용함에 따라 운용 및 평가 측면에서 불일치 현상이 발생한다. 이런 문제를 해결하기 위해서는 운용부서와 리스크 관리부서간의 협의가 필요하고 이런 부분이 거래소 가이드라인에 포함되어야 할 것이다. 둘째, 로컬변동성을 사용하면 특성상 등가격(at-the-money)에서 낮은 변동성을 주므로 일반적으로 감마매수 구간에서는 운용의 효율성을 증대시키나 KI근처에 도달하면 델타수량의 급격한 증가로 KI시에는 보유물량을 처분해야 하는 부담이 크게 된다. 마찬가지로 감마매도 구간에서도 등가격의 낮은 변동성을 통한 헤징효과 때문에 수익을 내기 힘들다. 또한 지수가 상승할 경우 변동성이 더 낮아져 오히려 더 매입해야 하는 역전현상이 발생하여 감마운용을 어렵게 만든다. 또한 HSCEI와 같이 변동성 매도지수 같은 전략지수가 지수 수익률 대비 성과가 좋지 않아서 공시되지 못하는 시장에서는 변동성 헤징 또한 큰 손실을 유발시킬 가능성이 크다.

11) ELS의 조기상환일 혹은 만기상환일에 선물을 이용한 헤징을 시행할 때, 백위태이션 현상이 발생하면 현물가격 대비 이론선물가격이 낮게 책정되는 특징과 ELS에 내재된 KI 상품구조의 감마매수 특성이 결합되어 현물델타 대신 선물델타 헤징수량을 많이 요구하게 된다.

III. ELS 헤징 전략

ELS를 포함한 파생상품 포트폴리오 헤징전략은 수익률의 비정규성으로 인해 VaR 대신에 CVaR 최적화 기법을 사용한다. 앞 장에서 언급한 선물을 이용한 헤징전략의 문제점을 해결하기 위해서 현물을 이용한 CVaR 기반 지수추적 방법을 제안하고, 이 방법을 확장하여 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 헤징방법을 새롭게 제안하고자 한다. 아울러 제안된 방법의 우수성을 실제 사례에 적용 분석하여 실증분석 결과를 보이고자 한다.

1. 기존 헤징 전략 소개 및 문제 제기

1.1 기존 헤징 방법 : 파생상품 포트폴리오의 CVaR 최소화

ELS상품 헤징 포트폴리오 위험 최소를 설명하기 위해서 Alexander, Coleman, and Li.(2006)와 같이 가정하자. 주어진 시간 $\tau > 0$ 에서 ELS상품 기초자산의 가격은 $S_\tau \in \mathbf{R}^d$, 초기 기초자산의 가격은 S_0 , 초기에 n 개의 헤징수단을 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 개 갖고 있을 때 τ 시점에서 손실함수는 $f(\mathbf{x}, S)$ 라 하자. $\tau > 0$ 시점에서 헤징수단의 가격을 $\mathbf{V}^\tau = \{V_1(\tau, S_\tau), \dots, V_n(\tau, S_\tau)\}$ 라 하면 헤징수단 \mathbf{x} 개를 갖고 $\tau > 0$ 기간 동안 포트폴리오 손실함수는 다음과 같다.

$$f(\mathbf{x}, S_\tau) = -\mathbf{x}^\top (\mathbf{V}^\tau - \mathbf{V}^0) \quad (2)$$

기초자산의 가격 $S_\tau \in \mathbf{R}^d$ 의 밀도함수를 $p(S)$ 라고 가정하면, 헤징수단 \mathbf{x} 개로 구성된 포트폴리오의 손실이 한계치 α 값보다 작을 확률은 다음과 같이 누적분포로 나타낼 수 있다.

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) \equiv \int_{f(\mathbf{x}, S) \leq \alpha} p(S) dS \quad (3)$$

주어진 신뢰수준 β 에서 \mathbf{x} 개로 구성된 포트폴리오의 투자기간 τ 에서 VaR은

$$\alpha_\beta(\mathbf{x}) \equiv \inf \{ \alpha \in \mathbf{R} : \Psi(\mathbf{x}, \alpha) \geq \beta \} \quad (4)$$

이고 CVaR인 $\phi_\beta(\mathbf{x})$ 는 Pfug(2000)와 Rockafellar and Uryasev(2002)에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\phi_\beta(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x}, S) \geq \alpha_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, S) p(S) dS \\ &= \inf \left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{S \in \mathbf{R}^d} [f(\mathbf{x}, S) - \alpha]^+ p(S) dS \right),\end{aligned}\quad (5)$$

여기서 함수 $[f(\mathbf{x}, S) - \alpha]^+$ 는 $f(\mathbf{x}, S) \geq \alpha$ 이면 $f(\mathbf{x}, S) - \alpha$ 이고 $f(\mathbf{x}, S) < \alpha$ 이면 0이다.

한편 손실함수 $f(\mathbf{x}, S)$ 는 \mathbf{x} 의 선형함수이므로 양의 상수 $\rho > 0$ 에 대해서

$$\alpha_\beta(\rho \cdot \mathbf{x}) = \rho \cdot \alpha_\beta(\mathbf{x}), \quad \text{그리고} \quad \phi_\beta(\rho \cdot \mathbf{x}) = \rho \cdot \phi_\beta(\mathbf{x})$$

인 선형조건을 만족한다. 이런 특성을 이용하여 Rockafellar and Uryasev(2002)는 식 (5)가 다음과 같은 1단위 투자손실 최소화 문제로 전환됨을 보였다.

$$\begin{aligned}\min_{(\mathbf{x}, \alpha)} &\left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{S \in \mathbf{R}^d} [-(\delta \mathbf{V})^\top \mathbf{x} - \alpha]^+ p(S) dS \right) \\ \text{subject to} &\quad (\mathbf{V}^0)^\top \mathbf{x} = 1 \quad \text{and} \quad (\overline{\delta \mathbf{V}})^\top \mathbf{x} = \bar{r}\end{aligned}\quad (6)$$

여기서 $\delta \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^\tau - \mathbf{V}^0$ 이고 $\overline{\delta \mathbf{V}} = \mathbf{E}[(\delta \mathbf{V})]$ 이다.

Alexander, Coleman, and Li(2006)는 식 (6)과 같이 정의된 파생상품 포트폴리오에 대한 VaR와 CVaR 최소화 문제가 전형적으로 부적절하게 정립된(ill-posed) 문제¹²⁾임을 보인다. 이런 문제를 해결하는 방안으로 많은 헤징도구를 사용하면 관리비용(management cost)이 많이 발생하므로 헤징에 사용되는 도구(instruments)가 많아짐에 따른 페널티를 추가하는 방식을 다음과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned}\min_{(\mathbf{x}, \alpha)} &\left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{S \in \mathbf{R}^d} [-(\delta \mathbf{V})^\top \mathbf{x} - \alpha]^+ p(S) dS + \sum_{j=1}^n c_j |x_j| \right) \\ \text{subject to} &\quad (\mathbf{V}^0)^\top \mathbf{x} = 1 \quad \text{and} \quad (\overline{\delta \mathbf{V}})^\top \mathbf{x} = \bar{r}\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 관리비용 상수 c_j 는 관리비용을 고려하지 않은 식 (6)의 최적화 문제로부터 구한 CVaR의 1% 수준에서 균등하게 결정하였다.

12) 최적 포트폴리오의 위험크기와 같은 위험을 가지는 여러 개의 다른 포트폴리오가 존재하고 자료의 미소한 변동에도 최적 포트폴리오가 심하게 변하는 현상을 의미한다.

1.2 헤지펀드 운용과 스텝다운형 ELS의 비교

포트폴리오 보험(portfolio insurance)전략 중에서 풋옵션 매수 전략은 하락하는 시장에서 매우 유효한 전략이나 비싼 설정 비용이 들어서 장기간 운용할 경우에 현물의 보유로 발생한 수익을 소비하여 많은 경우 음(-)의 수익률을 줄 수 있다. 반면에 외가격(out-of-the-money) 풋옵션 매도전략은 변동성 매도 전략으로 시장의 변동성이 감소할 때 수익을 줄 수 있지만 변동성이 큰 폭으로 증가하는 구간에서는 그동안의 수익이 소멸될 수 있다. 예를 들어, 1987년 Black Monday와 같이 시장의 급락시 이전에 매도한 외가격 풋옵션이 내가격(in-the-money)으로 전환되어 풋옵션 가격이 크게 비싸지며 이로 인해서 변동성 매도전략으로 수년간에 얻은 수익을 단 하루의 폭락이 모두 소멸시키고도 더 손실을 일으킬 수 있다.

주식 헤지펀드(equity hedge fund)는 일반적으로 시장수익률 대비 옵션과 유사한 비선형적인 수익률을 갖는 유형이 많다. Agarwal and Naik(2004)는 “많은 헤지펀드가 풋옵션 매도 포지션으로 구성이 되어 있으며 변동성 리스크에 크게 노출이 되어 있다.” 라고 한다. 변동성 매도 전략을 이용한 헤지펀드는 S&P500과 같은 안정적인 시장에서 상대적으로 고평가된 외가격 풋옵션의 매도를 통하여 주된 수익을 창출¹³⁾하고 있으며 이 전략의 유효성은 S&P500 풋매도 지수가 S&P500 현물 지수 대비 꾸준히 상대적으로 우수한 성과를 내고 있다는 사실로 확인할 수 있다. 즉 실제 시장에는 급락에 대한 보험 비용이 반영되어 위험중립을 가정한 옵션 이론가격 대비 높게 형성 되고 있으며 이 부분이 풋매도 전략을 통한 헤지펀드의 주 수익원이다. 이 전략은 강세장 또는 횡보장에서 원하는 수익을 안겨주는 반면 시장이 크게 급락하면 수년간 쌓아올린 수익의 대부분을 상실할 수 있다.

한편 임현철, 최영수(2015)에서 언급했듯이 스텝다운형 ELS 투자자는 디지털 콜옵션(digital call option)을 매수하고, KI이전에는 행사가격이 발행가 대비 60% 수준인 풋옵션을 매도하고 Down and Out(DO)옵션을 매수하나, KI이후에는 DO옵션이 소멸되어 행사가격이 발행가 대비 80% 수준인 풋옵션을 매도한 것이다. 이런 ELS 상품구조는

13) 국내에서도 코스피 선물매도 풋매도지수가 발표되고 있다. 시장의 특성을 반영하여 수익을 창출하여야 하는 전략지수의 특성에 따라 2010년 이후 상방이 막혀 있고 아래쪽의 조정이 자주 발생하는 KOSPI200의 특성을 반영하여 급락조정으로 인한 손실의 보전과 상승의 제한을 이용한 파생지수이며 해당 지수의 KOSPI200 지수 대비 우수한 성과는 등가격(at-the-money) 및 외가격 풋옵션의 급락장을 대비한 보험 프리미엄이 시장에 반영되고 있음을 의미한다.

외가격 풋옵션을 매도하여 추가 수익을 추구하는 헤지펀드의 변동성 매도전략과 유사함을 알 수 있다. 하지만 헤지펀드는 만기가 길거나 제한이 없어 급락 후 회복기간이 존재하지만 스텝다운형 ELS는 만기가 제한되어 있으며 KI조건이 있는 경우에는 ELS 투자자는 더욱 큰 손실을 입을 수 있다. 아울러 스텝다운형 ELS의 수익구조를 복제하는 발행사의 헤징전략도 변동성 매도 전략과 유사하다. 따라서 ELS를 보유하고 있는 고객은 물론 발행사도 이 전략의 위험에 그대로 노출될 수 있다.

ELS 발행사의 입장에서 변동성 매도로 인한 문제점을 경감하려면 기존의 변동성 매도 전략에 기초한 헤지펀드의 위험관리 방안을 연구하는 것이 큰 의미가 있을 수 있다. 풋옵션 매도 전략을 제외하고 보면 일반적인 주식형 펀드의 주 전략은 매입 후 보유(buy and hold)전략이 일반적이다. 기간을 길게 보면 이 전략은 효율적 시장가설에 근거한 유효한 전략이나 시장의 침체 또는 급락 시에는 하락위험에 그대로 노출이 된다. 변동성 매도 헤지펀드의 경우 침체기에도 수익을 낼 수 있으나 심한 급락이 오면 가중된 손실을 내는 구조이다. 특히 경험적으로 시장은 상승 속도 대비 하락의 속도가 훨씬 빠른 경우가 많다. 과도한 급락으로 나타나는 수익률의 두꺼운 꼬리(fat tail)현상은 “수익률이 정규분포를 따른다.” 라는 가정을 부정할 수 있는 대표적 사례이다. 이런 현상을 감안하여 위험관리측면에서 허용가능 손실을 정규성 및 대칭성을 가정한 표준편차 이외에 수익률 자체의 과거 자료로 나타내는 방법이 역사적(historical) VaR 이고 허용 손실영역 전체의 (가중)평균값으로 파악하는 방법이 조건부 VaR(conditional VaR; CVaR)방법이다. 특히 속성상 CVaR는 옵션이 포함된 비선형 수익률의 분포를 가진 펀드의 위험관리 및 최적화에 많이 적용되고 있으며 일반 주식형 포트폴리오에서도 수익률의 급락으로 인한 손실을 줄이는데 많이 적용된다.

Rockafellar and Uryasev (2002)는 위험을 줄이기 위해서 VaR 최소화 대신에 CVaR 최소화를 사용하여 금융상품 포트폴리오 최적화 혹은 헤징문제를 다뤘다. 그들은 VaR 계산과 CVaR 최적화 과정¹⁴⁾을 동시에 진행하여 $CVaR \geq VaR$ 인 관계를 이용하여 CVaR가 작은 포트폴리오는 VaR도 작은 값을 가짐을 보일 뿐 아니라 VaR보다 CVaR가 훨씬 일관적인 위험측도(consistent measure of risk)임을 보였다.

Alexander, Coleman, and Li(2006)는 파생상품 포트폴리오에 대한 VaR와 CVaR 최소화 문제가 전형적으로 부적절하게 정립된(ill-posed) 문제임을 보이면서 CVaR

14) 선형계획법(linear programming)과 원활하지 않은 최적화기법(nonsmooth optimization)을 사용하여 CVaR 최적화가 이뤄짐을 보였다. 실증분석으로는 헤징도구가 하나인 경우에 적용하여 분석하였고 다량의 헤징도구인 경우에도 적용될 수 있다고 주장한다.

최적화문제에 추가적인 선호기준을 비용으로 포함할 것을 제안한다.

1.3 현물을 이용한 CVaR 기반 지수 추적(Index Tracking) 방법

Rockafellar and Uryasev (2002)는 CVaR가 갖는 위험 측도로서의 범용성과 유용성을 설명하면서 액티브(active)한 위험관리 도구로서 지수를 복제하는 투자전략 사례를 들었다. 구체적으로 지수를 복제하는 최적화문제에 CVaR 제약조건을 추가함으로써 기존 방법론에서 노출될 수 있는 복제오차를 효율적으로 제어할 수 있음을 보이고 이를 S&P시장에 적용하였다. 여기서 효율적이라 함은 추적 오차 중에서 지수 대비 아래쪽 영역에 대한 CVaR 제약조건을 엄격하게 관리함으로써 시장이 급락할 때, 복제 포트폴리오가 지수 대비 손실을 줄일 수 있는 경향이 있음을 의미한다. 이는 잦은 시장의 급락 상황에서 복제 포트폴리오 운용자에게 손익이 유리하게 작용함을 의미한다.

먼저 $t \in \{1, \dots, T\}$ 시점의 지수가격을 I_t , n 개의 주가가격을 $S_{j,t}$, $j = 1, \dots, n$ 이라 하자. 현물 포트폴리오의 j 번째 현물 보유수량이 x_j , $j = 1, \dots, n$ 이면 t 시점의 현물 포트폴리오 가격은

$$\Pi_t = \sum_{j=1}^n x_j S_{j,t}$$

이고, T 시점에서 현금보유금액이 ν 이면 지수를 $\theta = \nu/I_T$ 수량 보유하는 것으로 t 시점의 보유지수 대비 복제 포트폴리오의 상대적 추적오차를 앞 절의 손실함수로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f(\mathbf{x}, S_t) = \left(\theta I_t - \sum_{j=1}^n x_j S_{j,t} \right) \theta I_t \quad (8)$$

그러면 지수 복제문제는 식 (8)의 손실함수의 절대값(absolute value)을 최소화시키는 문제로 전환되며 복제 포트폴리오가 지수보다 낮게 되는 것에 대한 페널티를 CVaR를 사용하여 제약조건을 주면 다음과 같은 최적화 문제로 전환된다.

$$\min_{(\mathbf{x}, \alpha)} g(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |f(\mathbf{x}, S_t)| \quad (9)$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n x_j S_{j,T} = \nu \text{ and } 0 \leq \text{lb}_j \leq x_j \leq \text{ub}_j \leq 1$$

$$\text{and } \alpha + \frac{1}{(1-\beta)T} \sum_{t=1}^T [f(\mathbf{x}, S_t) - \alpha]^+ \leq \omega$$

식 (9)는 주어진 신뢰구간 β 와 CVaR ω 가 주어지면 선형계획법¹⁵⁾을 이용하여 풀 수 있다.

2. 헤징방법에 따른 실증 분석

2.1 현물을 이용한 CVaR 기반 지수 추적(Index Tracking) 실증분석

현물을 이용한 CVaR 기반 지수추적의 성과분석을 위해서 KOSPI200, S&P500, HSCEI 지수를 대상으로 분석하고자 한다. 2010년 4월 1일부터 300 거래일수를 사용하여 1.3절의 계산방식을 이용하여 현물 포트폴리오 비중을 1주일 간격으로 계산한다. 예를 들어, 2010년 4월 1일부터 2011년 6월 8일까지 S&P500 일별 자료 300개의 대표본(in-sample)을 사용하여 현물 포트폴리오 비중을 계산한다. 계산된 비중을 이용하여 2011년 6월 9일부터 2012년 6월 6일까지의 가격변화 추이를 $P_{CVaR}(1,t), t = 1, \dots, 252$ 라고 하면 S&P500 지수는 $P_{Index}(1,t), t = 1, \dots, 252$ 이다. 이런 과정을 1주일 간격으로 시행하여 $(P_{CVaR}(n,t), P_{Index}(1,t)), n = 1, \dots, 192$ 자료를 생성할 수 있다.

	KOSPI200	S&P500	HSCEI
분석기간	10.4.1~16.3.30	10.4.1~16.3.24	10.4.1~ 16.3.23
in-sample기간	300일		
out-of-sample기간	1년		
생성포트폴리오 수	189	192	182

지수추적 성과를 평가하기 위하여 먼저 일별 수익률을 로그수익률로 계산한 후

$$r_{name}(n,t) = \text{Ln}(P_{name}(n,t) / P_{name}(n,t-1)), \text{ name} = \text{CVaR}, \text{Index}$$

일별 오차(daily error) 및 일별 오차 표본평균 시계열은

$$DE(n,t) = \{r_{CVaR}(n,t) - r_{Index}(n,t)\}, DE(n) = \overline{DE(n,t)}$$

이고 대표본을 사용하여 구한 비중이 외표본에서 좋은 성과를 내는 지를 파악하기 위해서 1년 후의 지수 대비 초과수익(excess return) 및 시장비율(market ratio) 시계열은

15) Rockafellar and Uryasev(2002)는 CPLEX LP solver를 이용하여 해결하였다.

$$ER(n) = \ln(P_{CVaR}(n, 252)/P_{CVaR}(n, 1)) - \ln(P_{Index}(n, 252)/P_{Index}(n, 1))$$

$$MR(n) = \frac{P_{CVaR}(n, 252)/P_{CVaR}(n, 1)}{P_{Index}(n, 252)/P_{Index}(n, 1)}, \quad n = 1, \dots, 192$$

라고 정의하자.

CVaR 기반 지수추적 방법이 지수를 잘 추정하는지와 급락위험에 적절하게 대응하는지를 검증하기 위해서 다음과 같은 가설검증을 실시하였고 <표 4>는 결과를 보고한다.

귀무가설 $H_0 : DE \leq 0, ER \leq 0, MR \leq 1$

대립가설 $H_1 : DE > 0, ER > 0, MR > 1$

<표 4> CVaR 기반 지수추적 가설 검증

<패널 A> 일별 오차 샘플평균(DE)

	S&P500	HSCEI	KOSPI200
평균	0.0106%	0.0348%	0.0100%
표준편차	0.0024%	0.0166%	0.0082%
N	192	182	189
t-value	60.95	28.22	16.66

<패널 B> 1년 후 지수 대비 초과수익률(excess return; ER)

	S&P500	HSCEI	KOSPI200
평균	2.6715%	8.7284%	2.5056%
표준편차	0.6073%	4.1726%	2.0672%
N	192	182	189
t-value	60.95	28.22	16.66

<패널 C> 1년 후 시장 비율(market ratio; MR)

	S&P500	HSCEI	KOSPI200
평균	102.7094%	109.2167%	102.5591%
표준편차	0.6240%	4.6722%	2.1228%
N	192	182	189
t-value	60.17	26.61	16.57

주) 자유도가 190인 t-값 단측검정 임계는 95%(99%, 99.99%) 신뢰수준에서 1.65(2.35, 3.79) 이다.

<표 4>는 우수한 성과를 측정하는 일별 오차 샘플평균, 1년 후 초과수익률 및 시장비율 모든 측도에서 신뢰수준 99.99%에서도 귀무가설을 기각하여 CVaR 기반 지수추적 방식이 지수보다 좋은 성과를 보임을 알 수 있다. 특히 코스피200이나 S&P500보다 급락위험이 높은 항생지수에서 더욱 좋은 성과를 보임을 알 수 있다.

<표 5> CVaR 기반 지수 추적오차 및 Sharpe Ratio 분석

<패널 A> 추적오차 및 정보비율(information ratio)

	S&P500	HSCEI	KOSPI200
평균 T/E	0.7222%	4.5228%	2.3787%
평균 IR	3.7333	1.8969	1.0837

<패널 B> Sharpe Ratio 검증

	S&P500		HSCEI		KOSPI200	
	CVaR	Index	CVaR	Index	CVaR	Index
평균	1.2135	0.9994	0.4615	0.0809	0.1343	-0.063
분산	0.4687	0.4463	0.5925	0.4762	0.2071	0.1822
관측수	192	192	182	182	189	189
피어슨상관계수	0.9981		0.9789		0.9219	
자유도	191		181		188	
t통계량	65.68		30.28		15.37	

아울러 CVaR 기반 현물 포트폴리오의 추적 정도를 파악하기 위해서 추적오차 표준편차(tracking error; T/E)와 정보비율(information ratio)을 다음과 같이 정의한다.

$$T/E(n) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(DE(n, \cdot))} \quad \text{and} \quad IR(n) = \frac{\overline{DE(n, \cdot)}}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(DE(n, \cdot))}}$$

<표 5>의 패널 A는 T/E와 IR을 지수별로 보고한다. 항생지수의 T/E 및 DE의 샘플평균이 크나 IR수준에서는 1.9로 중간수준임을 알 수 있고 S&P500는 T/E가 상대적으로 낮아서 IR이 3.7로 높게 나타난다. Grinold and Kahn(200)에 의하면 IR은 0을 평균으로 정규분포와 유사한 모양을 띄고 IR이 0.5 이상이면 상위 25%의 매니저라고 할 수 있으며 IR이 1 이상이면 상위 10% 안에 들어가는 매니저라고 할 수 있다고 한다. 따라서 Grinold and Kahn(200)의 IR기준에 의하면 모든 지수에서 CVaR 기반 지수추적 매니저는 상위 10% 안에 들어가는 것을 알 수 있다.

지수와와의 상대 비교를 위하여 Sharpe Ratio(SR)¹⁶를 계산하여 분석하고자 한다. 일별 로그수익률 $r_{name}(n, t)$, $name = CVaR, Index$ 을 이용하여 계산한 한 결과는 <표 5>의 패널 B이다. CVaR 기반 현물 포트폴리오가 지수보다 SR이 모든 지수에서 높음을 알 수 있다. CVaR 기반 현물 포트폴리오의 평균 SR값이 지수의 평균값보다 높은지를 다음과 같은 t-검정으로 검증해 본 결과 세 지수 모두 신뢰수준 99.99%에서 귀무가설을 기각하는 것으로 나타난다.

$$\text{귀무가설 } H_0 : SR_{CVaR} \leq SR_{Index} \quad \text{vs.} \quad \text{대립가설 } H_1 : SR_{CVaR} > SR_{Index}$$

2.2 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 CVaR 기반 헤징방법 실증분석

헤징방법을 적용할 가상 ELS 상품의 구조는 스텝다운형이나 논의를 간단하게 진행하기 위해서 기초자산이 항생지수만으로 구성되었다고 가정하자. 발행일은 2013년 1월 2일, 만기일은 2015년 12월 30일, 자동조기상환일은 매 6개월로서 5회 발생가능하고 조기상환 조건은 발행당시지수 대비 95, 95, 85, 85, 80% 수준, 녹인배리어는 60% 수준, 연 쿠폰은 7%지급한다. 본 가상상품은 4번째 조기상환 일에 쿠폰 14% 지급 후 종료하였다. 상품의 가치평가를 위해서 무위험이자율은 연 1.5%라 가정하자.

2.1절에서 언급한 현물 포트폴리오 변화 추이를 살펴보기 위하여 발행일 기준 과거 300 거래일의 일별자료를 내표본으로 사용하여 항생지수를 추적하는 CVaR 기반 현물 포트폴리오¹⁷을 구성한 후, 발행일 이후 500거래일까지 가격을 $P_{CVaR}(t)$, $P_{Index}(t)$ 을 계산한 후, 300일 시점가격으로 나눠 단위화한 가격을 그린 그림이 <그림 8>이다.

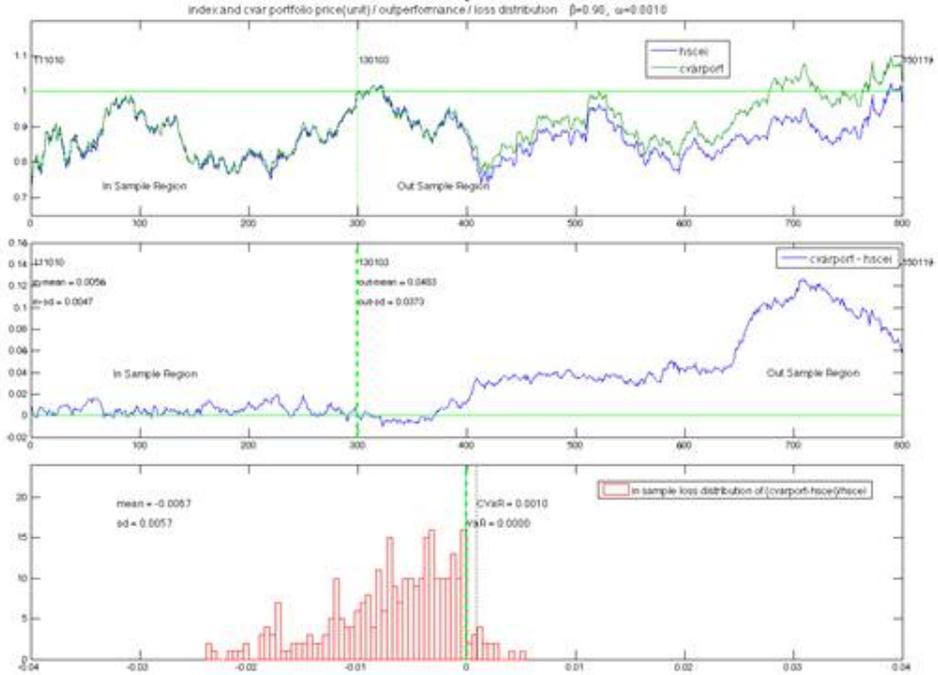
그림 8은 300개의 내표본 자료를 이용하여 산출한 현물 포트폴리오 비중을 301번째부터 800번째까지 유지할 경우에 항생지수 추이 대비 현물포트폴리오 추이를 나타낸 것이다. 그림 8은 상대편차를 그린 그림으로 내표본의 샘플 평균은 0.0056이고 표준편차는 0.0047인 반면에 외표본의 평균은 0.0483이고 표준편차는 0.0373으로 외표본에서 CVaR 기반 현물 포트폴리오가 지수보다 우수한 성과를 낼 수 있다. 그림 9는 손실함수를 상대오차 $(P_{CVaR}(t) - P_{Index}(t))/P_{Index}(t)$ 로 정의하여 CVaR

16) Sharpe Ratio는 위험조정 평가지표(risk-adjusted performance measure)로 알려져 있으며 포트폴리오 수익률에서 무위험이자수익률(risk-free rate)을 뺀 초과수익률을 포트폴리오의 변동성으로 나눈 값을 의미한다. 여기서는 지수와의 비교를 위해 무위험이자수익률을 모두 0%로 놓고 계산하였다.

17) 본 사례에서는 식 (9)의 모수를 $\beta = 0.90$, $\omega = 0.001$ 로 사용하여 구했다.

값이 $\omega = 0.001$ 로 제어되고 있음을 보여주고 있다.

<그림 8> 항생지수 스텝다운형 ELS의 CVaR 기반 현물 포트폴리오의
지수 추적(上), 상대오차(中), 내표본 손실함수 산포도(下)



주) 그림 상과 중의 x-축 300을 기준으로 왼쪽은 내표본 구간이고 오른쪽은 외표본 구간이다. 그림 하의 손실함수를 상대오차 $(P_{CVaR}(t) - P_{Index}(t))/P_{Index}(t)$ 로 정의하여 CVaR 값이 $\omega = 0.001$ 로 제어되고 있음을 보여주고 있다.

헤징전략의 성과 비교를 위해서 다음과 같이 가정하자. 헤징수량을 계산할 때 사용되는 변동성은 과거 180 거래일 자료로부터 계산한 역사적 변동성을 사용하고, 헤징도구로는 선물 V_F , 현물지수가 거래된다는 가정아래 V_I , CVaR 기반 현물 포트폴리오 V_C 이다. ELS의 평가금액을 N 이라 하면, t 시점의 헤징에 따른 $t+1$ 시점의 수익 PL_{t+1} 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
PL_{t+1} &= D_{F,t} \cdot (V_{F,t+1} - V_{F,t}) - (N_{t+1} - N_t) && \text{Futures} && (10) \\
&= D_{I,t} \cdot (V_{I,t+1} - V_{I,t}) - (N_{t+1} - N_t) && \text{Index(가상)} \\
&= D_{I,t} \cdot (V_{C,t+1} - V_{C,t}) - (N_{t+1} - N_t) && \text{CVaR} \\
&= w \cdot (V_{C,t+1} - V_{C,t}) + (D_{F,t} - w) \cdot \\
&\quad (V_{F,t+1} - V_{F,t}) - (N_{t+1} - N_t) && \text{Fut. + CVaR}
\end{aligned}$$

식 (10)에서 비교한 헤징전략은 1) 선물을 이용한 헤징, 2) 지수가 가상적으로 상장되어 거래되고 있다는 가정 하에 수행한 헤징, 3) CVaR 기반 현물 포트폴리오가 거래소에서 ETF형태로 거래된다는 가정 하에 수행한 헤징, 4) 선물헤징 포지션 중에서 일부분을 현물 포트폴리오와 결합하여 수행한 헤징이다.

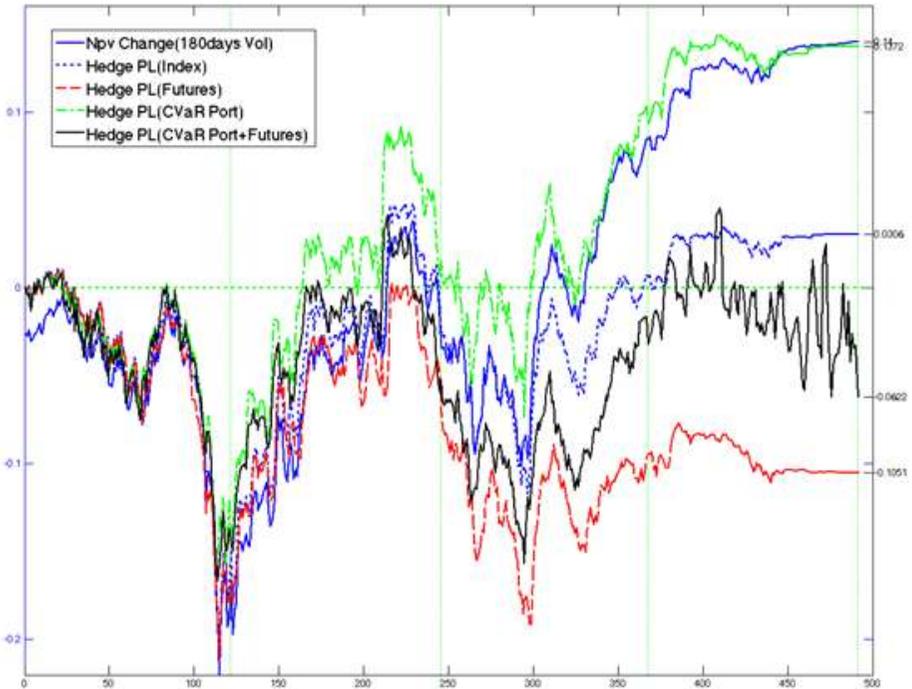
<그림 9>는 가상 항생지수 기반 ELS상품에 대한 네 가지 방식의 헤징을 수행한 결과로 4번째 조기상환 일 T 에 14% 쿠폰이 지급된 것이다. 180일 역사적 변동성을 이용한 발행일의 평가금액은 $N_{-1} = 97.36$ 이나 수수료로 2.64을 지급했으므로 발행일(상환일)에서의 평가금액은 $N_0 = 100 (= 97.36 + 2.64)$ ($N_T = 114$)이다. 따라서 그림에서 푸른색 실선 평가변화금액은 $N_{-1} - N_0 = -2.64$ ($N_T - N_0 = 14$)이므로 평가금액 변화에 따라 조기상환 일에서 운용자가 지급할 금액은 -11.36 이다. 그림에서 Hedge PL은 식 (10)의 PL_{t+1} 에서 평가금액 변화를 제외하고 헤징에서 발생한 수익 금액을 그린 것으로 발행일에는 모두 0 이고 조기상환 일에는 선물(가상지수, CVaR, CVaR+선물¹⁸⁾의 Hedge PL은 -10.49 (3.06, 13.72, -5.13) 이다. 따라서 헤징손익은 평가변화금액을 투자자에게 지급해야 하므로 각각 -21.85 ($-8.3, 2.36, -16.49$) 이다.

가장 좋은 성과는 CVaR 기반 현물 포트폴리오를 델타 수량에 맞춰 헤징을 운용할 때 발생한다. 이유는 지수의 급락시 현물 포트폴리오의 지수 대비 상대적 좋은 성과가 큰 델타수량을 통하여 가중시킨데 기인한다. 가장 나쁜 성과는 선물만을 가지고 헤징을 운용하였을 때 일어나며 원인은 현물지수 대비 선물의 저평가 및 선물의 다음날 가격 예측력으로 인하여 감마운용수익이 감소하기 때문이다. 현물 포트폴리오와 선물을 동시에 이용한 경우는 예상과 달리 선물만으로 운용함을 가정한 경우 대비 성과가 좋은데 그치고 오히려 지수만을 사용하여 헤징이 가능하다고 가정한 경우보다 낮은

18) 일반적으로 D_f 와 D_p 가 다르나 현물 대비 선물가격 괴리도 변화가 심해서 같다는 가정하에 진행하였고 네 번째의 경우 선물 매도 헤징을 고려하기 위해서 $w = 1$ 을 가정하였다. 모든 전략은 거래비용을 고려하지 않았고 지수와 선물의 증가만을 사용하여 도출하였다. 현물 포트폴리오 경우에는 선물대비 거래비용이 높으나 반면에 배당수익이 있는 데, 고배당이므로 거래비용을 충분히 상쇄할 수 있을 것이다.

성과를 올린다. 이유는 현물 포트폴리오가 지수 대비 성과가 좋지만(특히 지수의 급락구간) 원금의 고정된 비율만큼 포트폴리오를 보유하는 것은 지수 하락시 델타 대비 많이 보유하게 되어 전체적으로 성과에 좋지 않은 영향을 미치기 때문이다.

<그림 9> 항생지수 스텝다운형 ELS의 모형별 헤징성과 비교



주) 푸른색 실선 Npv Change는 ELS의 평가변화금액이고 Hedge PL은 식 (10)의 PL_{t+1} 에서 평가금액 변화를 제외하고 헤징에서 발생한 수익 금액이다. 푸른색 점선(빨간색 대시선, 녹색 점실선, 검정색 실선)은 가상지수(선물, CVaR 기반 현물, CVaR+선물)를 이용한 Hedge PL 이다.

V. 결론 및 정책 제언

본 논문은 ELS(Equity Linked Security)시장의 대표적인 상품인 HSCEI를 포함한 두 개의 지수 기반 조기상환 스텝다운형 ELS에 내재된 KI특성으로 생성된 급락위험으로 인해 야기되는 헤징위험을 분석하고, 대응방안으로 현물 포트폴리오 및 선물을 이용한 CVaR(Conditional Value at Risk) 기반 헤징전략을 새롭게 제시하였다.

스텝다운형 ELS 구조에 내재된 KI특성으로 ELS 수익률분포가 비대칭성이 매우 큰 양봉분포를 따라 평균-분산 최소화 헤징전략은 한계점이 있다. 아울러 현·선물관련 변동성 차이 및 헤징수량 불일치 문제와 항생선물 관련 잦은 롤오버 시행으로 정보노출 및 과도한 항생지수 기반 ELS 발행으로 선물 유동성 부족으로 선물을 이용한 헤징이 어렵다. (항생)선물만을 이용한 헤징으로 발생하는 문제를 최소화하기 위하여 본 논문에서는 2단계 방식을 제안한다. 첫째, Rockafellar and Uryasev (2002)가 제안한 방식에 따라 S&P500, KOSPI200, HSCEI 지수를 구성하는 현물을 이용하여 지수추적(index tracking) 현물 포트폴리오를 추적오차 절대값 최소화 및 CVaR 최적화 문제로 먼저 해결한다. 둘째, 앞서 구한 현물포트폴리오를 선물 및 채권과 결합하여 파생상품 포트폴리오 CVaR 최적화 문제로 헤징방법을 제안하였다.

KOSPI200, S&P500, HSCEI 지수에 적용하여 실증 분석한 결과, 첫째, 외표본에서 CVaR 기반 지수추적 현물 포트폴리오가 일별 오차 샘플 평균, 시장비율, 정보비율, Sharpe Ratio을 이용한 모든 평가지표에서 지수추적을 잘 하면서 급락위험이 적음을 알 수 있었다. 특히 급락위험이 높은 항생지수에서 더욱 좋은 성과를 보임을 알 수 있었다. 둘째, 기초자산이 항생지수 한 개만으로 구성된 스텝다운형 ELS에 헤징전략을 적용한 결과 현물 포트폴리오를 이용한 헤징전략이 선물만을 이용한 헤징전략보다 우수함을 확인할 수 있었다.

정책적인 제언으로 지수 ELS 상품의 기초자산인 지수를 복제하는 ETF가 거래소에 상장된다면 다양한 상품 구조의 중위험·중수익 구조화 상품을 개발할 수 있을 뿐더러 헤징도 원활하게 수행할 수 있을 것이다. 이로 인해 저금리 시대에 수익률을 제고할 수 있는 새로운 상품군을 발굴할 수 있을 것이다. 향후 추가적인 연구로는 ELS 상품의 특성상 감마 매수 구간과 매도구간이 혼재되어 나타나므로 불확정 변동성(uncertain volatility) 모형을 사용하여 헤징전략에 변동성을 제어할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 구본일, 엄영호, 지현준, “주가연계예금 가치평가모형에 대한 실증연구,” 「재무연구」, 20, 1, 2007, 155-186.
- 박준영, 현종석, “거래비용을 고려하여 주가연계증권을 헤징할 때 발생하는 비용과 위험의 상쇄효과에 대한 시뮬레이션 연구,” 「선물연구」, 17, 2, 2009, 1-47.
- 윤선중, “투자자 보호를 위한 구조화상품의 규제방안에 대한 연구,” 「재무연구」, 25, 4, 2012, 521-557.
- 윤선중, “구조화상품 시장의 성장과 내재변동성 왜곡현상에 대한 연구,” 「선물연구」, 22, 3, 2014, 433-464.
- 임성원, 박도현, 빈기범, “보이지 않는 ‘ELS 그림자 위험’”, 「한국증권학회지」, 45권 1호, 2016, 35-60.
- 임현철, 최영수, “ELS 발행 및 헤지에 따른 주식시장의 영향과 녹-인 효과 연구”, 「선물연구」, 23, 2, 2015, 289-321.
- Agarwal, V. and N.Y. Naik, “Risks and Portfolio Decisions Involving Hedge Funds“, *The Review of Financial Studies*, vol. 17, no. 1, 2004, 63-98.
- Alexander, S., T.F. Coleman, and Y. Li, “Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives“, *Journal of Banking and Finance*, 30, 2006, 583-605.
- Avellaneda, M., A. Levy, and A. Paras, “Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities“, *Applied Mathematical Finance*, 2, 1995, 73-88.
- Martini, C. and A. Jacquier, “The Uncertain Volatility Model” , 2008, working paper.
- Pflug, G.Ch, “Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk” , In S. Uryasev, editor, *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk“” *Journal of Risk*, vol. 2, no. 3, 2000, 21-41.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev, “Conditional value-at-risk for general loss distributions,” *Journal of Banking and Finance*, 26, 2002, 1443-1471.
- Uryasev, S., “Conditional value-at-risk: Optimizatin Algorithms and Applications“, Computational Intelligence for Fianacial Engineering, 2000. (CIFEr) Proceedings

of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on.

Yang, D. and Q. Zhang, “Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices“, *Journal of Business*, 2000, vol. 73, no.3, 477-492.